

Pourquoi abandonner q_f ? Nouvelle approche de l'irréversibilité en thermodynamique technique.

Par Jean-Noël BEURY
Lycée Gustave Eiffel - 33000 BORDEAUX
jnbeury@laposte.net

RESUME

La méthode actuellement enseignée en thermodynamique technique pour prendre en compte les irréversibilités dans un système est basée sur des hypothèses implicites qui sont en contradiction avec le 1er principe. Dans cet article, nous présenterons cette méthode (méthode 1 avec q_f), en montrerons les incohérences sur le cas d'un échangeur thermique où elle ne permet pas de faire apparaître les irréversibilités thermiques.

Nous proposerons une nouvelle approche (méthode 2 avec q_{ef}) de l'irréversibilité en thermodynamique technique respectant les principes de base de la thermodynamique. Cette nouvelle approche sera appliquée à l'échangeur thermique et à tous les systèmes rencontrés en thermodynamique technique.

PLAN DE L'ARTICLE

1. Présentation des notations actuellement utilisées en thermodynamique technique : méthode 1 avec q_f
 2. Pourquoi faut-il abandonner la méthode 1 avec q_f ?
 - 2.1. Incohérences de la méthode 1 avec un échangeur thermique possédant des irréversibilités thermiques.
 - 2.2. Explications des incohérences de la méthode 1 : contradiction avec les principes de base de la thermodynamique
 3. Nouvelle approche de l'irréversibilité en thermodynamique technique : méthode 2 avec q_{ef}
 - 3.1. Introduction de q_{ef}
 - 3.2. Avantages d'utiliser la méthode 2
 - 3.3. Comment calculer q_f dans les problèmes de concours PT ?
 - 3.4. Application de la méthode 2 à l'échangeur thermique possédant des irréversibilités thermiques.
 4. Application de cette nouvelle méthode aux systèmes rencontrés en thermodynamique technique.
 - 4.1. Pourquoi utiliser une transformation FICTIVE réversible polytropique avec un gaz parfait ?
 - 4.2. Etude du compresseur
- Annexe 1 : Expression du premier principe pour un système ouvert en régime permanent avec une entrée et une sortie.
- Annexe 2 : Création d'entropie dans un échangeur thermique.

1. PRÉSENTATION DES NOTATIONS ACTUELLEMENT UTILISÉES EN THERMODYNAMIQUE TECHNIQUE : MÉTHODE 1 AVEC Q_f

On envisage une transformation irréversible de l'état 1 à l'état 2 d'un système ouvert en régime permanent avec une entrée et une sortie. Le lecteur pourra se reporter à l'annexe 1 pour la démonstration du premier principe de la thermodynamique avec un système ouvert.

On définit :

- δw_i = **travail indiqué** massique (travail fourni par les parties mobiles de la machine au fluide). C'est le travail autre que celui des forces de pression qui est compris dans la variation d'enthalpie.
- δq_e = transfert thermique massique algébriquement reçu de l'extérieur (**échangé avec l'extérieur**) à travers la frontière du système ouvert.
- δq_f = quantité de chaleur massique dissipée par frottement ($\delta q_f \geq 0$)
- δw_f = travail massique des forces de frottement ($\delta w_f \leq 0$)

Le travail massique des forces intérieures de viscosité (forces de frottement) est transformé intégralement en chaleur massique de frottement : $\delta w_f + \delta q_f = 0$.

On remplace la transformation irréversible par une transformation réversible respectant les conditions suivantes :

- même loi de variation que la transformation réelle.
- chaleur massique de frottement δq_f supposée fournie à température variable (sans irréversibilité thermique) par une source fictive pour respecter la condition précédente.

Dans ces conditions, la chaleur reçue par le fluide est : $\delta q = \delta q_e + \delta q_f$. La variation d'entropie massique pour une transformation réversible est : $ds = \frac{\delta q}{T} = \frac{\delta q_e + \delta q_f}{T}$.

On a 3 équations :

$dh + de_c + de_p = \delta w_i + \delta q_e + \cancel{\delta w_f} + \cancel{\delta q_f}$ $dh = Tds + vdp$ $ds = \frac{\delta q_e + \delta q_f}{T} \text{ et } \delta q_f \geq 0$
--

- La première équation est le premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert en régime permanent à une entrée et une sortie.
- La deuxième équation est l'identité thermodynamique. On rencontre plusieurs formes de l'identité thermodynamique. C'est la forme la plus utilisée en thermodynamique technique.
- La troisième équation vient du deuxième principe de la thermodynamique :
 - $\delta q_f > 0$ si la transformation est irréversible
 - $\delta q_f = 0$ si la transformation est réversible.

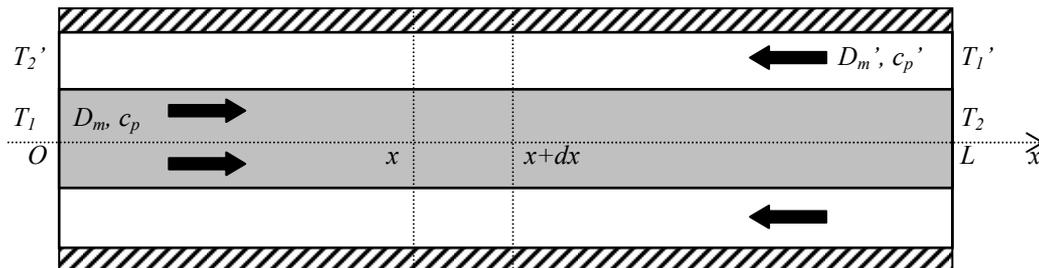
2. POURQUOI FAUT-IL ABANDONNER LA MÉTHODE 1 AVEC Q_f ?

2.1. Incohérences de la méthode 1 avec un échangeur thermique possédant des irréversibilités thermiques.

On considère un échangeur thermique parfaitement calorifugé à contre courant en régime permanent. On note T_1 et T_1' les températures, supposées connues, des fluides à l'entrée de l'échangeur, T_2 et T_2' sont respectivement les températures à la sortie.

Le système ouvert étudié est un élément de longueur dx de la conduite 1→2. On note $T(x)$ la température à l'abscisse x . La température à l'abscisse x de la conduite 1'→2' est notée $T'(x)$.

On fait l'étude en régime permanent. Il n'y a pas de partie mobile de la machine (pas de travail autre que celui des forces de pression) : $\delta w_i = 0$. On néglige les variations d'énergie cinétique et potentielle.



Les 3 équations de la méthode 1 s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} dh + \cancel{de_c} + \cancel{de_p} = \cancel{\delta w_i} + \delta q_e \\ dh = T ds + v dp \\ ds = \frac{\delta q_e + \delta q_f}{T} \end{array} \right. \quad \text{On a donc : } \left\{ \begin{array}{l} ds = \frac{\delta q_e}{T} + \frac{\delta q_f}{T} = \frac{dh}{T} + \frac{\delta q_f}{T} \\ ds = \frac{dh}{T} - \frac{v}{T} dp \end{array} \right.$$

On en déduit que $\delta q_f = -v dp$

Dans un échangeur thermique (voir annexe 2), on rencontre deux types d'irréversibilité :

- **irréversibilité mécanique** (due à la viscosité du fluide). Elle se traduit par une baisse de pression (pertes de charge).

On peut montrer en mécanique des fluides que la viscosité des fluides peut s'interpréter par un phénomène de diffusion de quantité de mouvement engendré par un gradient de vitesse.

- **irréversibilité thermique** (diffusion de chaleur) : écart entre les températures des deux conduites. Le transfert thermique se fait spontanément du corps le plus chaud vers le corps le plus froid.

Ces deux types d'irréversibilité complètement indépendants sont dus aux phénomènes diffusifs (diffusion de quantité de mouvement et diffusion de chaleur).

En pratique, on néglige très souvent la baisse de pression (perte de charge) : $dp = 0$. Par contre, il y a très souvent une irréversibilité thermique (voir annexe 2 où il faudrait avoir un échangeur de très grande longueur).

La méthode 1 donne $\delta q_f = 0$ alors qu'on a une irréversibilité thermique !!!

2.2. Explications des incohérences de la méthode 1 : contradiction avec les principes de base de la thermodynamique

- La transformation réversible suit la même loi de variation que la transformation réelle or on ne connaît pas la loi de variation d'une transformation irréversible puisque les états intermédiaires ne sont pas définis. On connaît uniquement l'état initial 1 et l'état final 2.

- L'écriture des deux relations
$$\begin{cases} dh + \cancel{de_c} + \cancel{de_p} = \delta w_i + \delta q_e + \cancel{\delta w_f} + \cancel{\delta q_f} \\ ds = \frac{\delta q_e + \delta q_f}{T} \end{cases}$$
 suppose que

l'on a le même δq_e pour la transformation réelle et la transformation modélisée.

En thermodynamique, le transfert thermique et le travail dépendent du chemin suivi. On n'a pas le même transfert thermique pour la transformation réelle et la transformation modélisée.

- On rajoute un transfert thermique venant de l'extérieur pour tenir compte de la dissipation d'énergie. Le terme δq_f est rajouté à δq_e dans le bilan d'entropie mais pas dans l'énoncé du premier principe puisque $\delta w_f + \delta q_f = 0$.

On ne doit pas rajouter δw_f dans le premier principe car c'est une force intérieure.

Conclusion : la méthode 1 n'est pas cohérente avec les principes de base de la thermodynamique.

3. NOUVELLE APPROCHE DE L'IRRÉVERSIBILITÉ EN THERMODYNAMIQUE TECHNIQUE : MÉTHODE 2 AVEC Q_{ef}

3.1. Introduction de q_{ef}

Je propose de ne plus utiliser la méthode 1 (appelée d'ailleurs tour de passe-passe par certains auteurs (référence [1]) qui revient à mélanger dans les calculs la transformation réelle et la transformation réversible) mais de mettre en évidence **deux chemins** (transformation **réelle irréversible** et transformation **FICTIVE réversible**) pour aller du même état initial au même état final.

- Pour la transformation **REELLE irréversible**, on écrit uniquement le premier et deuxième principe de la thermodynamique.

$$\begin{cases} dh + de_c + de_p = \delta w_i + \delta q_e \\ ds = \delta s_e + \delta s_c \end{cases}$$

δw_i est le travail indiqué massique pour la transformation réelle.

δq_e est le transfert thermique massique pour la transformation réelle.

* $\delta s_e = \frac{\delta q_e}{T_s}$ pour un échange de chaleur avec une source de chaleur à la température T_s . Cette

relation est valable uniquement pour un système en contact avec une source de chaleur.

* $\delta s_e = 0$ si la transformation est adiabatique.

* si le système échange de la chaleur avec un autre système dont la température varie, on peut utiliser la notion de pseudo-source de chaleur.

* dans le cas général, on définit T_Σ la température de la surface fermée à travers laquelle se fait

le transfert thermique. L'entropie échangée s'écrit alors : $S_e = -\oint_{\Sigma} \frac{\vec{J}_S \cdot d\vec{S}_{ext}}{T_\Sigma} dt$.

* δs_c est appelé entropie créée massique : $\delta s_c > 0$ pour une transformation irréversible, $\delta s_c = 0$ pour une transformation réversible.

* en thermodynamique technique, on a très souvent de_c et de_p nuls ou négligeables sauf pour les gaz en sortie du tuyère.

* voir annexe 1 pour la démonstration du premier principe de la thermodynamique avec un système ouvert en régime permanent à une entrée et une sortie.

- Pour la transformation **FICTIVE réversible**, on écrit l'identité thermodynamique, le premier principe, et le deuxième principe de la thermodynamique.

Pour cette transformation FICTIVE réversible, on définit un travail indiqué massique réversible $\delta w_{i\ rev}$ noté δw_{if} et un transfert thermique massique réversible $\delta q_{e\ rev}$ noté δq_{ef} . On appelle :

δw_{if} = travail indiqué massique fictif (calculé sur la transformation FICTIVE réversible)
 δq_{ef} = **transfert thermique massique fictif (calculé sur la transformation FICTIVE réversible).**

$$\left\{ \begin{array}{l} dh + de_c + de_p = \delta w_{if} + \delta q_{ef} \\ dh = Tds + vdp \\ ds = \frac{\delta q_{ef}}{T} \end{array} \right.$$

3.2. Avantages d'utiliser la méthode 2 :

- **Cette méthode est tout à fait cohérente avec les principes fondamentaux de la thermodynamique : les variations des fonctions d'état (enthalpie, entropie...) ne dépendent pas du chemin suivi, par contre les travaux, les transferts thermiques, l'entropie échangée et l'entropie créée dépendent du chemin suivi.** Pour calculer l'entropie échangée, il faut connaître le chemin suivi par la transformation réelle. Très souvent, on travaille avec une transformation réelle adiabatique. L'entropie échangée de la transformation réelle est alors nulle.
- On dissocie bien la transformation réelle de la transformation FICTIVE. **On représente donc en pointillés la transformation réelle si elle est irréversible.**
- Avec la méthode 1, on rencontre deux définitions de l'entropie échangée :

$$\delta s_e = \frac{\delta q_e}{T_s} \text{ (définition n°1) et } \delta s_e = \frac{\delta q_e}{T} \text{ (définition n°2).}$$

- Pour étudier les machines cycliques dithermes, il faut utiliser la définition n°1 : $S_e = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F}$ en notant T_C et T_F les températures des sources chaude et froide.
- Par contre, pour étudier les systèmes ouverts en régime permanent, il faut utiliser la définition n°2 : $\delta s_e = \frac{\delta q_e}{T}$.

Pourquoi faut-il utiliser la température de la source de chaleur pour certains exercices et la température du système pour d'autres exercices ? **Cette différence peut entraîner des confusions pour les étudiants.**

- Avec la méthode 2, on a une **définition unique de l'entropie échangée pour tous les systèmes thermodynamiques** : $\delta s_e = \frac{\delta q_e}{T_S}$.

Remarque : si la transformation réelle est réversible, on a au cours de la transformation $T_S = T$, l'entropie échangée vaut alors $\delta s_e = \frac{\delta q_e}{T}$.

3.3. Comment calculer q_f dans les problèmes de concours PT ?

Dans le cas général, les deux grandeurs q_f et q_{ef} ne sont pas égales. Par contre dans les problèmes de concours PT traitant l'irréversibilité en thermodynamique, on a des transformations adiabatiques (exemple compresseur, turbine, laminage...).

La méthode 1 donne : $ds = \frac{\delta q_e + \delta q_f}{T}$. La méthode 2 donne : $ds = \frac{\delta q_{ef}}{T}$

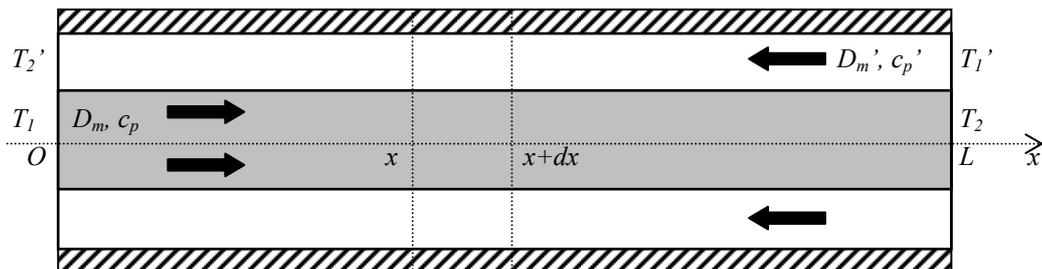
Les deux grandeurs q_f et q_{ef} sont donc égales.

Pour répondre aux questions des problèmes de concours concernant q_f , il suffit donc
 - de calculer q_{ef} avec la méthode 2
 - et d'écrire à la fin des calculs que $q_f = q_{ef}$.

3.4. Application de la méthode 2 à l'échangeur thermique possédant des irréversibilités thermiques.

On reprend l'échangeur à contre courant étudié dans le paragraphe 2.1. Le fluide dans la conduite 1→2 passe de l'état 1 (p_1, T_1) à l'état 2 (p_2, T_2). On néglige la baisse de pression ($p_1 = p_2$) et on étudie le cas particulier où il se réchauffe. L'échange thermique étant irréversible, la température $T'(x)$ (température à l'abscisse x de la conduite 1'→2') est nécessairement supérieure à $T(x)$ (température à l'abscisse x de la conduite 1→2).

On considère un élément de longueur dx de la conduite 1→2 à l'abscisse x :



- Pour la transformation **REELLE irréversible**, on écrit uniquement le premier et deuxième principe de la thermodynamique :

$$\begin{cases} dh + \cancel{de_c} + \cancel{de_p} = \cancel{\delta w_i} + \delta q_e \\ ds = \delta s_e + \delta s_c = \frac{\delta q_e}{T'} + \delta s_c \end{cases} \quad (\delta w_i = 0 \text{ car pas de partie mobile de la machine})$$

- Pour la transformation **FICTIVE réversible**, on écrit l'identité thermodynamique $dh = Tds + v \cancel{dp}$

On en déduit la variation d'entropie massique : $\Delta s = \int_1^2 \frac{dh}{T} - \int_1^2 \frac{v \cancel{dp}}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dh}{T}$

L'entropie échangée massique vaut $s_e = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dh}{T'}$

L'entropie créée massique vaut : $s_c = \Delta s - s_e = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dh}{T} - \int_{T_1}^{T_2} \frac{dh}{T'} = \int_{T_1}^{T_2} dh \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right)$

Comme $T' > T$ et $dh > 0$, on a donc $s_c > 0$.

Remarque : On obtient le même résultat avec un refroidissement du fluide dans la conduite 1→2 avec $T' < T$ et $dh < 0$,

L'application de la méthode 2 donne donc des résultats tout à fait cohérents alors que la méthode 1 aboutissait à une entropie créée nulle.

Remarque : Si on a une irréversibilité thermique et une irréversibilité mécanique, on a alors

$$s_c = \Delta s - s_e = \left(\int_{T_1}^{T_2} dh \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right) \right) + \left(\int_1^2 \frac{-v dp}{T} \right).$$

Interprétation physique :

L'entropie créée est égale à la somme de deux termes :

- Le premier terme est positif $\int_{T_1}^{T_2} dh \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right)$. Il traduit l'irréversibilité thermique (diffusion de chaleur).
- Le deuxième terme est positif : l'irréversibilité mécanique (due à la viscosité du fluide) se traduit par une baisse de pression.

*Conclusion : en pratique, la mise en équation des échangeurs se fait **en étudiant simultanément les évolutions de l'état des deux fluides** (voir annexe 2). L'objet de ce paragraphe est simplement de montrer la cohérence de la méthode 2 par rapport à la méthode 1. On retrouve bien les deux sources d'irréversibilité dues aux phénomènes diffusifs (diffusion de chaleur et diffusion de quantité de mouvement).*

Par contre, nous devons reprendre l'étude détaillée de l'irréversibilité en thermodynamique technique avec la méthode 2 puisqu'elle se faisait jusqu'à présent avec la méthode 1. Nous allons étudier le compresseur dans cet article.

4. APPLICATION DE CETTE NOUVELLE MÉTHODE AUX SYSTÈMES RENCONTRÉS EN THERMODYNAMIQUE TECHNIQUE.

4.1. Pourquoi utiliser une transformation FICTIVE réversible polytropique avec un gaz parfait ?

Pour le compresseur (voir paragraphe 4.2) et la turbine, on modélise souvent la transformation réelle irréversible par une transformation FICTIVE réversible polytropique avec un gaz parfait.

4.1.1. Introduction de la polytropique pour un gaz parfait

Cela revient à considérer que les irréversibilités sont réparties uniformément tout au long de la compression, ce qui sur la plan technologique, correspond assez bien au cas des machines multi étagées (voir référence [2]). Ce modèle se traduit par la relation suivante : $T ds = c dT$ (s entropie massique, T température absolue en Kelvin) où c est la *capacité thermique massique vraie* de cette évolution (c est une constante, indépendante de la température). Il ne faut pas confondre pour le gaz parfait c , c_v et c_p .

On peut écrire l'identité thermodynamique et la relation entre h et T pour un gaz parfait :

$$dh = c_p dT = T ds + v dp. \text{ On en déduit que } c_p \frac{dT}{T} = c \frac{dT}{T} + v \frac{dp}{T}.$$

Comme $pv = rT$, on a $c_p \frac{dT}{T} = c \frac{dT}{T} + r \frac{dp}{p}$ (eq.1). Pour trouver une relation entre p et v , il

faut éliminer T et dT : $pv = rT \Rightarrow \frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} = \frac{dT}{T}$ (eq.2). En combinant les équations 1 et 2,

on obtient : $(c - c_p) \left(\frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} \right) + r \frac{dp}{p} = 0$, d'où $(c - c_p + r) \frac{dp}{p} + (c - c_p) \frac{dv}{v} = 0$. Or

$$r = c_p - c_v, \text{ on a donc } c - c_p + r = c - c_v. \text{ On en déduit : } (c - c_v) \frac{dp}{p} + (c - c_p) \frac{dv}{v} = 0$$

En intégrant : $(c - c_v) \ln p + (c - c_p) \ln v = cte1$, d'où $\ln p + \ln v^{\frac{c-c_p}{c-c_v}} = cte2$;

Cette évolution est donc définie par $pv^k = cte$ avec $k = \frac{c - c_p}{c - c_v}$. En utilisant $pv = rT$, on

arrive à
$$Tp^{\frac{1-k}{k}} = cte$$
.

k est appelé le coefficient polytropique de la transformation.

4.1.2. Calcul de k

Pour calculer k , on connaît très souvent dans les problèmes l'état initial (T_1, p_1) et l'état final (T_2, p_2). La température et la pression s'obtiennent très facilement avec des capteurs de température et de pression. On utilise très souvent en thermodynamique technique le jeu de variables (T, p).

Il suffit d'écrire la relation $Tp^{\frac{1-k}{k}} = cte$ pour l'état 1 et pour l'état 2.

$$T_1 p_1^{\frac{1-k}{k}} = T_2 p_2^{\frac{1-k}{k}} ; \text{ d'où } \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1-k}{k}} \text{ d'où } \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right) = \frac{1-k}{k} \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$$

$$\text{d'où } k \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = (1-k) \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \text{ et } k \left\{ \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) + \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \right\} = \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

$$\text{Finalement, on obtient : } k = \frac{\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}{\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) + \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}.$$

$$\text{Connaissant } k, c_p \text{ et } c_v, \text{ on peut en déduire } c = \frac{kc_v - c_p}{k-1}.$$

$$\mathbf{4.1.3. Calcul de } q_{ef} = \int_1^2 T ds$$

Il y a deux possibilités :

- 1^{ère} possibilité au programme des Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles PT : Pour calculer les aires, on **linéarise dans le diagramme (T, s) conformément au programme de PT** : $q_{ef} = \int_1^2 T ds = (s_2 - s_1) \frac{T_1 + T_2}{2}$ (voir paragraphe 4.2.5).
- 2^{ème} possibilité : elle peut être abordée dans certains problèmes de concours (exemple ENSAM PT 1998) : $q_{ef} = \int_1^2 T ds = c(T_2 - T_1)$

On peut donc calculer très facilement les aires et interpréter le transfert thermique massique fictif q_{ef} .

Cette deuxième possibilité est beaucoup moins courante mais permet de calculer très facilement q_{ef} sans faire d'approximation de linéarisation.

4.2. Etude d'un compresseur adiabatique avec la méthode 2

4.2.1. Etude thermodynamique d'un compresseur adiabatique réversible

Un **compresseur** est un organe mécanique destiné à augmenter par un procédé uniquement mécanique la pression d'un fluide. On veut faire passer la pression du fluide de p_1 à p_2 avec $p_2 > p_1$. Les compresseurs sont utilisés dans de nombreuses applications industrielles : réfrigération, compresseur à air. Les compresseurs peuvent être regroupés en deux grandes catégories :

- les **compresseurs volumétriques** : le fluide est emprisonné dans un volume fermé que l'on réduit pour réaliser la compression.
- les **turbocompresseurs ou compresseurs à aubages**. On a un mouvement continu du fluide. La compression est obtenue en convertissant l'énergie cinétique communiquée au fluide en pression par des aubages mobiles. On a donc un système ouvert (machine avec transvasement). Le système considéré sera un gaz.

On étudiera dans cet article uniquement les turbocompresseurs. Ce sont des machines compactes avec des surfaces d'échange faibles et des coefficients d'échange thermique faible (pour un gaz). On suppose donc très souvent la compression adiabatique.

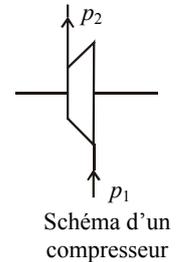
Dans ce paragraphe, on suppose la transformation réversible.

a) Expression du 1^{er} et 2^{ème} principe de la thermodynamique

On néglige les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle. On appelle par définition le travail de transvasement massique : $w_t = \int_1^2 v dp$.

Les relations fondamentales s'écrivent :

$$\begin{cases} dh + \cancel{de_c} + \cancel{de_p} = \delta w_i + \cancel{\delta q_e} \\ dh = Tds + vdp \\ ds = \frac{\cancel{\delta q_e}}{T} \end{cases} \quad . \text{ On a donc : } \begin{cases} dh = \delta w_i \\ dh = vdp \end{cases}$$



On en déduit immédiatement que $\delta w_i = vdp = \delta w_t$ et $\Delta h = w_t = w_i = \int_1^2 v dp$

Pour un compresseur : $w_i > 0$. Le travail de transvasement correspond au travail que l'on doit fournir au compresseur pour faire passer 1 kg de fluide de la pression p_1 à la pression p_2 .

b) Interprétation graphique dans le diagramme (T, s).

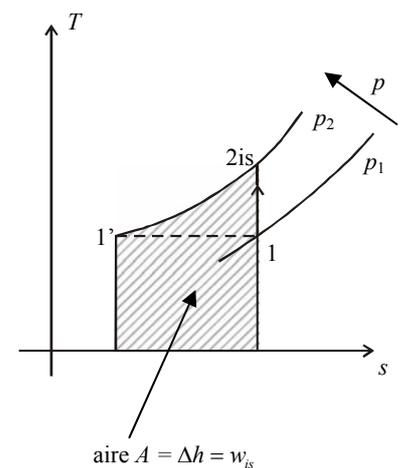
La transformation est adiabatique réversible, donc isentropique.

On définit le point 1' tel que $h_{1'} = h_1$, c'est-à-dire $T_{1'} = T_1$ pour un gaz parfait.

Le travail indiqué massique w_i est noté w_{is} : travail indiqué massique isentropique.

Sur l'isobare p_2 : $dh = Tds + v dp$, d'où $h_{2is} - h_{1'} = \int_{1'}^{2is} Tds = \text{aire } A$

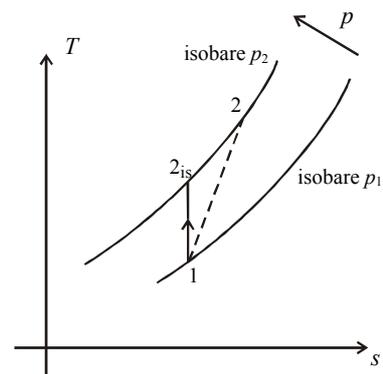
On a donc : $w_{is} = \Delta h = h_{2is} - h_{1'} = w_{ts} = h_{2is} - h_1 = \text{aire } A$



4.2.2. Etude thermodynamique d'un compresseur adiabatique irréversible

Dans un compresseur réel, il faut tenir compte des forces de viscosité (frottements fluides internes). On a donc une irréversibilité mécanique.

a) On considère une compression adiabatique réversible (donc isentropique) de la même pression initiale p_1 à la même pression finale p_2 . L'état final est noté 2is (état 2 isentropique). On a une augmentation de la température lors de la compression, donc $T_{2is} > T_1$. On se déplace sur une verticale dans le diagramme (T, s).



b) La transformation réelle est irréversible : on la représente en traits pointillés. Le fluide passe de la pression p_1 à la pression p_2 . A cause des forces de viscosité (frottements fluides internes), il y a dissipation d'énergie et donc échauffement du fluide.

La température finale T_2 (pour la transformation réelle) est plus grande que la température T_{2is} (pour la transformation isentropique) : $T_2 > T_{2is}$

On envisage 2 chemins pour aller de l'état 1 à l'état 2 :

- transformation réelle adiabatique irréversible.
- transformation FICTIVE réversible $1 \rightarrow 2$ qui a le même état initial 1 (T_1, p_1) et le même état final 2 (T_2, p_2). Le gaz reçoit de l'extérieur $q_{ef} > 0$: **transfert thermique** massique reçu pour la transformation FICTIVE réversible correspondant à **l'échauffement du fluide**.

<p>Transformation réelle : $\begin{cases} \Delta h = w_i + \cancel{q_e} \\ \Delta s = \cancel{s_e} + s_c \end{cases}$ ($q_e = 0$ et $s_e = 0$ car adiabatique)</p> <p>Transformation FICTIVE, réversible : $\begin{cases} dh + \cancel{de_c} + \cancel{de_p} = \delta w_{if} + \delta q_{ef} \\ dh = T ds + v dp \\ ds = \frac{\delta q_{ef}}{T} \\ w_i = \int_1^2 v dp \end{cases}$</p> <p>donc $\begin{cases} \Delta h = w_{if} + q_{ef} \\ ds = \frac{\delta q_{ef}}{T} > 0 \end{cases}$</p>

Bilan : On a le même Δh et Δs pour la transformation réelle et la transformation FICTIVE réversible puisqu'on a des variations de fonctions d'état avec le même état initial (T_1, p_1) et le même état final (T_2, p_2).

$$\Delta h = w_i > 0, \text{ d'où } \begin{cases} \Delta h = w_i = w_{if} + q_{ef} = w_i + q_{ef} \\ q_{ef} = \int_1^2 T ds \end{cases}$$

$\Delta h = h_2 - h_1$ peut être calculé avec le modèle du gaz parfait ou avec des tables, diagrammes thermodynamiques.

q_{ef} peut s'interpréter avec les aires dans le diagramme (T, s) (voir paragraphe 4.2.5)

4.2.3. Rendement indiqué isentropique du compresseur

Si on compare la variation d'enthalpie massique de l'évolution réelle $\Delta h_{réelle}$ à la variation d'enthalpie de l'évolution isentropique $\Delta h_{isentropique}$, on a nécessairement $\Delta h_{réelle} > \Delta h_{isentropique}$ (puisque $T_2 > T_{2is}$).

On a donc $w_{iréel} > w_{isentropique}$

On verra graphiquement l'interprétation graphique de $w_{iréel}$ et $w_{isentropique}$.

On définit :

$\text{rendement indiqué isentropique du compresseur} = \eta_{isc} = \frac{\Delta h_{isentropique}}{\Delta h_{réelle}} = \frac{h_{2is} - h_1}{h_2 - h_1}$

On vérifie que le coefficient est bien inférieur à 1.

Dans les exercices, le rendement indiqué isentropique du compresseur permet de calculer la température T_2 connaissant les autres températures et η_{isc} .

Interprétation physique : Il faut fournir plus de travail au compresseur fonctionnant entre deux pressions fixées avec une transformation irréversible qu'avec une transformation isentropique : le travail de transvasement isentropique apparaît donc comme le travail minimal à fournir à un compresseur fonctionnant entre deux pressions fixées.

4.2.4. Modélisation de la transformation réelle irréversible par une transformation FICTIVE réversible, polytropique avec un gaz parfait.

Dans de nombreux problèmes de concours PT, on modélise la transformation réelle irréversible par une transformation FICTIVE réversible, polytropique avec un gaz parfait. On connaît l'état initial (T_1, p_1) et l'état final (T_2, p_2). On peut mesurer facilement les températures et les pressions avec des capteurs. Pour calculer k , il suffit d'écrire la relation

$Tp^{\frac{1-k}{k}} = cte$ pour l'état 1 et pour l'état 2.

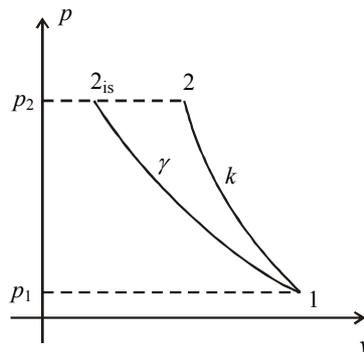
On a vu (voir paragraphe 4.1.2) que
$$k = \frac{\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}{\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) + \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}$$

On a : $k > \gamma$ pour une compression et $k < \gamma$ pour une détente.

Démonstration dans le cas particulier d'une compression adiabatique réversible avec un gaz parfait pour la transformation $1 \rightarrow 2_{is}$

Graphiquement, on représente dans le diagramme (p, v) la transformation réversible $1 \rightarrow 2_{is}$ et la transformation polytropique (d'indice k) réversible $1 \rightarrow 2$ (qui modélise la transformation réelle). On a vu que $T_2 > T_{2is}$. Comme $p_2 = p_{2is}$, on a donc $v_2 > v_{2is}$ (car $p v = r T$ pour un gaz parfait).

La pente de la transformation $1 \rightarrow 2$ est donc plus grande que la pente de la transformation $1 \rightarrow 2_{is}$ et donc $k > \gamma$.



4.2.5. Interprétation graphique dans le diagramme (T, s)

On définit le point 1' tel que $h_{1'} = h_1$, c'est-à-dire $T_{1'} = T_1$ pour un gaz parfait.

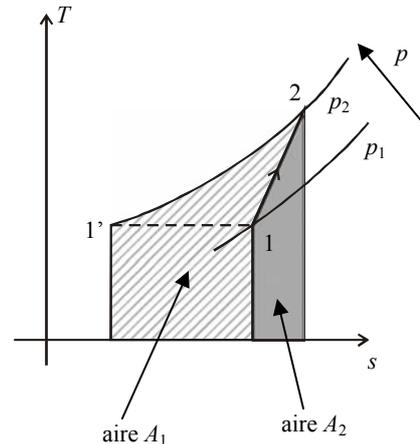
On envisage 2 chemins pour aller de l'état 1 à l'état 2 :

- transformation réelle adiabatique irréversible.
- transformation FICTIVE réversible 1 → 2 qui a le même état initial 1 (T_1, p_1) et le même état final 2 (T_2, p_2). Le gaz reçoit de l'extérieur un transfert thermique $q_f > 0$ (transfert thermique reçu pour la transformation FICTIVE réversible) correspondant à l'échauffement du fluide.

$$\text{Transformation réelle : } \begin{cases} \Delta h = w_i + q_e \\ \Delta s = s_e + s_c \end{cases}$$

($q_e = 0$ et $s_e = 0$ car adiabatique)

$$\text{Transformation FICTIVE, réversible : } \begin{cases} \Delta h = w_{if} + q_{ef} \\ dh = Tds + vdp \\ ds = \frac{\delta q_{ef}}{T} \\ w_i = \int_1^2 vdp \end{cases}$$



On en déduit que : $q_{ef} = \int_1^2 Tds = \text{aire } A_2$ et $w_{if} = w_i$.

Bilan : On a le même Δh pour les deux transformations.

$$\Delta h = w_i = w_{if} + q_{ef}$$

Or $w_i = \Delta h = h_2 - h_1 = h_{2is} - h_{1'}$, = aire sous la courbe 1' → 2 = aire $A_1 + A_2$

donc $A_1 + A_2 = w_i + A_2$, d'où $w_i = \text{aire } A_1$

Conformément au programme des concours PT, on peut linéariser

la partie 1 → 2 : $q_{ef} = \text{aire } A_2 = \text{aire du trapèze} = (s_2 - s_1) \frac{T_2 + T_1}{2}$

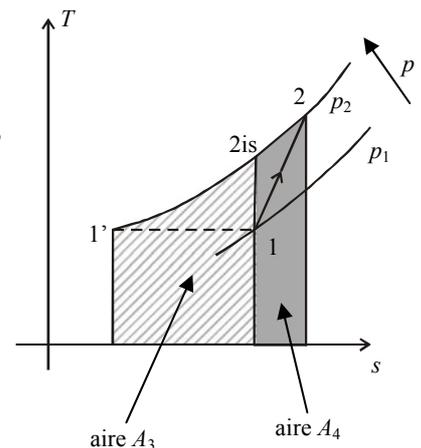
4.2.6. Comment justifier graphiquement que $w_{is} > w_{i \text{ réel}} ?$

On représente très souvent sur les diagrammes la compression isentropique 1 → 2is. On a vu que :

- $w_{is} = h_{2is} - h_1 = h_{2is} - h_{1'}$, = aire hachurée A_3
- $w_{i \text{ réel}} = h_2 - h_1 = h_2 - h_{1'}$, = aire sous la courbe 1' → 2 = aire $A_3 + A_4$

On peut donc conclure que : $w_{is} > w_{i \text{ réel}}$.

$$\begin{cases} w_{is} = \text{aire hachurée } A_3 \\ w_{i \text{ réel}} = \text{aire } A_3 + A_4 \end{cases}$$



Interprétation physique : Il faut fournir plus de travail au compresseur fonctionnant entre deux pressions fixées avec une transformation irréversible qu'avec une transformation isentropique : le travail de transvasement isentropique apparaît donc comme le travail minimal à fournir à un compresseur fonctionnant entre deux pressions fixées.

5. CONCLUSION

Nous avons démontré dans cet article que l'on ne peut pas traiter l'irréversibilité avec la relation $ds = \frac{\delta q_e + \delta q_f}{T}$. Cette façon de procéder conduit à des incohérences parce que le transfert thermique δq_e dépend du chemin suivi et pose des difficultés aux étudiants qui ont deux définitions de l'entropie échangée.

L'utilisation de δq_f doit donc être abandonnée (méthode d'ailleurs appelée tour de passe-passe par certains auteurs) et peut être remplacée facilement par δq_{ef} en écrivant de façon très explicite les deux chemins utilisés (transformation réelle et transformation fictive réversible).

Cette nouvelle approche de l'irréversibilité en thermodynamique permet de traiter tous les problèmes de concours sans modifier l'énoncé ou en remplaçant dans l'énoncé q_f par q_{ef} puisque ces questions concernent des transformations adiabatiques.

Dans cet article, cette nouvelle méthode a été appliquée au compresseur. Je termine la rédaction de la partie thermodynamique technique dans le nouveau livre « Physique – Tout-en-un – 2^{ème} année PT Cours et exercices corrigés – Collection J'intègre – DUNOD (parution prévue juin 2008) ». Cet ouvrage couvre, en un seul volume, la totalité des programmes de physique de 2^{ème} année de la filière PT. Les différents systèmes rencontrés en thermodynamique technique sont traités en détail avec la méthode *B* : différents types de compresseurs, turbine, tuyère, détente de Joule-Thomson ou laminage, systèmes ouverts à plusieurs entrées et plusieurs sorties, échangeur thermique, soutirage... avec de nombreux exercices, problèmes de concours corrigés et applications industrielles (cogénération, centrale nucléaire...), contraintes environnementales liées au réchauffement climatique, exercices utilisant le logiciel Thermoptim. Dans cet ouvrage, $q_f = q_{ef}$ est appliqué uniquement pour étudier l'irréversibilité du compresseur et de la turbine.

Un étudiant peut donc appliquer les relations ci-dessous pour traiter l'irréversibilité en thermodynamique technique. L'interprétation physique des résultats en est facilitée.

Système ouvert en régime permanent à une entrée et une sortie

- Pour la transformation **REELLE irréversible** :

$$\begin{cases} dh + de_c + de_p = \delta w_i + \delta q_e \\ ds = \delta s_e + \delta s_c \end{cases}$$

- Pour la transformation **FICTIVE réversible** :

$$\begin{cases} dh + de_c + de_p = \delta w_{if} + \delta q_{ef} \\ dh = Tds + vdp \\ ds = \frac{\delta q_{ef}}{T} \\ w_i = \int_1^2 vdp \end{cases}$$

La transition peut se faire très simplement de l'ancienne approche vers la nouvelle approche de l'irréversibilité en thermodynamique technique.

L'étude des bilans énergétiques est très souvent complétée par des bilans exergetiques (voir référence [5]) qui sont hors programme en PT.

Une analyse plus détaillée de l'entropie se fait dans certaines spécialités en écoles d'ingénieurs. La création interne d'entropie est la conséquence de toutes les dissipations liées aux gradients de pression, de concentration, de potentiel chimique, de température, de vitesses... Il faut alors comparer les échelles de temps de ces phénomènes à celles de l'écoulement. Il y a transformation locale d'énergie « noble » en énergie interne. Les spécialistes essaient de calculer cette source d'entropie en traitant finement les phénomènes dissipatifs avec des logiciels de mécanique des fluides utilisant des maillages très fins et des équations microscopiques.

REMERCIEMENTS

Tous mes remerciements à mes collègues du lycée Gustave Eiffel de Bordeaux, M. Dareau, Jorre (calculs de l'annexe 2), Rousselet et Salles ainsi qu'à Monsieur Gicquel (professeur de thermodynamique à l'école des Mines de Paris et auteur du logiciel Thermoptim) pour les nombreux échanges constructifs et la relecture attentive de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DESCAMPS Didier, ENSAM Lille <http://didierdescamps.free.fr/thermo.pdf>
- [2] GICQUEL Renaud, « Systèmes énergétiques, tome 1 et 2 », Ecole des Mines de
- [3] OUZIAUX, Cours de thermodynamique.
- [4] OUZIAUX Roger, « Mécanique des fluides appliquées », Dunod, 2004.
- [5] KIRILLIN, SYTCHEV, SHEINDLIN « Thermodynamique technique, technique soviétique », éditions Mir Moscou, 1976.
- Paris Les Presses, 2001.
- [6] OLIVIER Stéphane et GIE Hubert, « Thermodynamique 1^{ère} et 2^{ème} année », éditions Tec et Doc collection de sciences physiques, 1996.
- [7] Problème de concours - Banque PT 1998 – Epreuve IIA.
- [8] Problème de concours - Banque PT 2002 – Epreuve IIA.



Jean-Noël BEURY

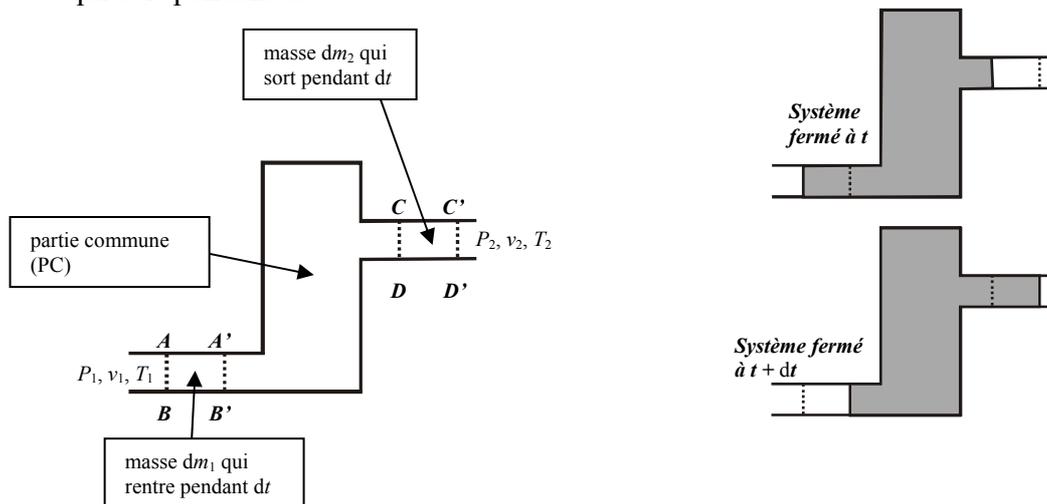
Professeur en Sup PCSI-SI
Lycée Gustave Eiffel
33000 BORDEAUX

ANNEXE 1 : EXPRESSION DU PREMIER PRINCIPE POUR UN SYSTÈME OUVERT EN RÉGIME PERMANENT AVEC UNE ENTRÉE ET UNE SORTIE

On considère un fluide qui s'écoule de l'état 1 (p_1, v_1, T_1) à l'état 2 (p_2, v_2, T_2). La **démonstration suivante est très générale** et suppose que l'on est en **régime permanent d'écoulement**. On note en minuscules les grandeurs massiques.

a) Comment se ramener à un système fermé ?

- Si on considère le système $A'B'CD$ (appelé partie commune PC) avec une frontière fixe, on a un système ouvert (échange de matière). On ne peut pas appliquer le premier principe de la thermodynamique.
- On se **ramène à un système fermé** (Σ) de la façon suivante :
 - système fermé (Σ) à t : partie commune (PC) + masse dm_1 (de volume dV_1) qui rentre pendant dt .
 - système fermé (Σ) à $t+dt$: partie commune (PC) + masse dm_2 (de volume dV_2) qui sort pendant dt .



b) Régime permanent

On dit aussi que le régime stationnaire ou indépendant du temps. Toutes les fonctions d'état du système ouvert sont les mêmes à t et à $t+dt$:

$$U_{PC}(t) = U_{PC}(t+dt) ; E_{mPC}(t) = E_{mPC}(t+dt) ; S_{PC}(t) = S_{PC}(t+dt) \text{ et}$$

$$M_{PC}(t) = M_{PC}(t+dt)$$

c) Conservation du débit massique

Le masse du système fermé est la même à t et à $t+dt$ (définition d'un système fermé).

$$\begin{cases} M_{\Sigma}(t) = M_{PC}(t) + dm_1 \\ M_{\Sigma}(t+dt) = M_{PC}(t+dt) + dm_2 \end{cases}$$

Comme $M_{\Sigma}(t) = M_{\Sigma}(t+dt)$, on en déduit immédiatement que $dm_1 = dm_2 = dm$ et

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt}. \text{ On a conservation du débit massique : } D_{m1} = D_{m2}$$

d) Expression du 1^{er} principe

Le premier principe pour le système fermé (Σ) s'écrit :

$$dU + dE_m = \delta W_{\text{extérieur}} + \delta Q_{\text{extérieur}}$$

- $dU = U(t + dt) - U(t) = \{U_{PC}(t + dt) + dm u_2\} - \{U_{PC}(t) + dm u_1\} = dm(u_2 - u_1)$
- $dE_m = E_m(t + dt) - E_m(t) = \{E_{mPC}(t + dt) + dm e_{c2} + dm e_{p2}\} - \{E_{mPC}(t) + dm e_{c1} + dm e_{p1}\}$
 $= dm(e_{p2} - e_{p1} + e_{c2} - e_{c1})$
- $\delta Q_{\text{extérieur}} = q_e dm =$ **transfert thermique algébriquement reçu de l'extérieur** (échangé avec l'extérieur) **à travers la frontière du système ouvert.**
- $\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{pression amont}} + \delta W_{\text{pression aval}} + \delta W_i$ avec

$\delta W_{\text{pression amont}} = \vec{F}_1 \cdot \vec{dl}_1 = +p_1 S_1 dl_1 = +p_1 dV_1 = p_1 v_1 dm > 0$ car force motrice (le volume de la masse qui rentre est exprimé avec le volume massique v_1)

On peut imaginer qu'un piston pousse du côté 1 pour faire rentrer la masse dm_1 . Le travail de cette force est donc positif.

$\delta W_{\text{pression aval}} = \vec{F}_2 \cdot \vec{dl}_2 = -p_2 S_2 dl_2 = -p_2 dV_2 = -p_2 v_2 dm < 0$ car force résistante (le volume de la masse qui sort est exprimé avec le volume massique v_2).

$\delta W_i = w_i dm =$ **travail indiqué = travail fourni par les parties mobiles de la machine au fluide.**

Finalement, on obtient : $(u_2 - u_1) + (e_{p2} - e_{p1} + e_{c2} - e_{c1}) = q_e + p_1 v_1 - p_2 v_2 + w_i$

On pose $h_2 = u_2 + p_2 v_2$ et $h_1 = u_1 + p_1 v_1$ et on a : $h_2 - h_1 + e_{p2} - e_{p1} + \frac{1}{2}c_2^2 - \frac{1}{2}c_1^2 = w_i + q_e$

En grandeurs massiques, le premier principe pour un système ouvert en régime permanent s'écrit :

$$\Delta h + \Delta e_p + \Delta e_c = w_i + q_e$$

Si on l'écrit en notation infinitésimale (états 1 et 2 très proches) :

$$dh + de_p + de_c = \delta w_i + \delta q_e$$

Tout se passe comme si une masse de 1 kg était transvasée de l'entrée ($ABA'B'$) à la sortie ($CDC'D'$) : on s'est donc ramené à un système fermé.

On dit qu'on a une **machine avec TRANSVASEMENT** puisqu'un fluide s'écoule en passant de l'état 1 à l'état 2. Tout se passe comme si une masse dm était « transvasée » de l'état 1 à l'état 2.

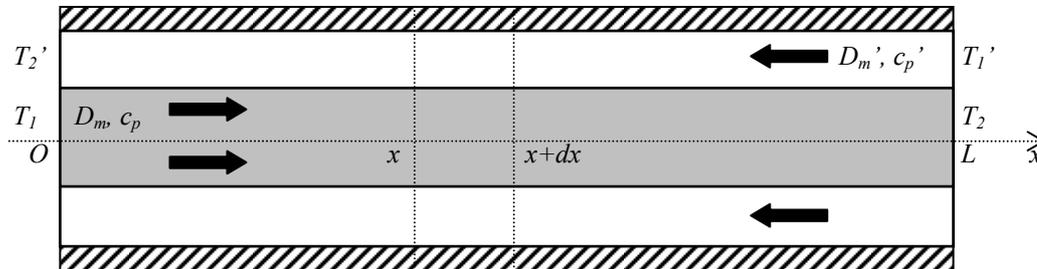
w_i est appelé le **travail indiqué massique** = travail massique autre que celui des forces de pression extérieures (compris dans la variation d'enthalpie) : c'est le travail fourni par les parties mobiles de la machine au fluide. Pour un compresseur : $w_i > 0$ et pour une turbine : $w_i < 0$.

q_e est le **transfert thermique massique reçu de l'extérieur** à travers toute la frontière du système ouvert.

Remarque : La démonstration précédente a été faite en supposant le régime permanent. On peut remplacer cette hypothèse par l'hypothèse d'une machine cyclique : c'est une machine qui revient dans le même état au bout du temps dt . Le dt choisi est le commun multiple de toutes les périodes des différents composants du système.

ANNEXE 2 : CRÉATION D'ENTROPIE DANS UN ÉCHANGEUR THERMIQUE

On considère un échangeur thermique parfaitement calorifugé, de longueur L , parcouru par deux fluides à contre-courant :



On note T_1 et T_1' les températures, supposées connues, des fluides à l'entrée de l'échangeur, T_2 et T_2' sont respectivement les températures à la sortie. On admet que les températures ne dépendent que de x et on néglige la conduction thermique le long de l'axe Ox . On note g la conductance thermique par unité de longueur de la paroi échangeuse.

Le premier principe de la thermodynamique pour chacun des fluides en régime permanent s'écrit :

$$D_m [h(x+dx) - h(x)] = g dx [T'(x) - T(x)] ; \quad D_m' [h'(x) - h'(x+dx)] = g dx [T(x) - T'(x)]$$

Soit :

$$D_m \frac{dh}{dx} = g(T' - T) ; \quad D_m' \frac{dh'}{dx} = g(T - T')$$

On assimile les deux fluides à des gaz parfaits :

$$D_m c_p \frac{dT}{dx} = g(T' - T) ; \quad D_m' c_p' \frac{dT'}{dx} = g(T - T')$$

On pose : $\lambda = \frac{D_m c_p}{g}$; $\lambda' = \frac{D_m' c_p'}{g}$ et $k = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}$.

On obtient : $\lambda \frac{dT}{dx} = T' - T$ (eq.1) ; $\lambda' \frac{dT'}{dx} = T - T'$ (eq.2)

- En faisant la différence des deux équations précédentes, on obtient :

$$\lambda \frac{dT}{dx} - \lambda' \frac{dT'}{dx} = 0, \text{ on a } \lambda T(x) - \lambda' T'(x) = \lambda T_1 - \lambda' T_2' \text{ (eq.3) et}$$

$$\lambda T(x) - \lambda' T'(x) = \lambda T_2 - \lambda' T_1' \text{ (eq.4)}$$

- On divise (eq.1) par λ et (eq.2) par λ' . En faisant la différence :

$$\frac{dT}{dx} - \frac{dT'}{dx} = T' \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) - T \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right), \text{ soit } \frac{d(T' - T)}{dx} = -k(T' - T)$$

On en déduit :

$$T'(x) - T(x) = (T_2' - T_1) e^{-kx} \text{ (eq.5) et } T'(x) - T(x) = (T_1' - T_2) e^{k(L-x)} \text{ (eq.6)}$$

En combinant (eq.3) et (eq.5), on a :

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2' - T_1}{k\lambda} (1 - e^{-kx}) \text{ (eq.7) ; } T'(x) = T_2 + \frac{T_2' - T_1}{k\lambda'} (1 - e^{-kx}) \text{ (eq.8)}$$

En combinant (eq.4) en $x = 0$ et (eq.7) en $x = L$, on obtient :

$$T_2' - T_1 = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda' - \lambda e^{-kL}} (T_1' - T_1) \quad (eq.9)$$

En combinant (eq.6) en $x = 0$ et (eq.9), on a :

$$T_1' - T_2 = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda' e^{kL} - \lambda} (T_1' - T_1) \quad (eq.10)$$

On en déduit immédiatement (avec eq.7 et eq.9) :

$$T(x) = T_1 + (T_1' - T_1) \frac{\lambda' (1 - e^{-kx})}{\lambda' - \lambda e^{-kL}} \quad (eq.11) ;$$

puis avec (eq.5), (eq.11) et (eq.9) on a : $T'(x) = T_1' + (T_1' - T_1) \frac{\lambda (e^{-kL} - e^{-kx})}{\lambda' - \lambda e^{-kL}}$

Remarque : Dans le cas très particulier où $\lambda = \lambda'$ ($k = 0$) : $T'(x) - T(x) = T_2' - T_1 = T_1' - T_2$

En combinant (eq.1) et (eq.3), on a $T(x) = T_1 + \frac{T_2' - T_1}{\lambda} x$ (eq.11) ; $T'(x) = T_2' + \frac{T_2' - T_1}{\lambda} x$ (eq.12)

Dans ce cas, et ce cas seulement, l'écart des températures est constant et vaut :

$$T'(x) - T(x) = \frac{T_1' - T_1}{1 + L/\lambda} \quad (\text{en combinant eq.11 et eq.12 en } x = L)$$

Cet écart devient nul si $L \gg \lambda$.

Un bilan entropique sur l'échangeur complet donne :

$$\frac{dS}{dt} = D_m (s_2 - s_1) + D_m' (s_2' - s_1') = \frac{\delta S_c}{dt}$$

Or, pour une isobare dans le cas particulier d'un gaz parfait, $ds = \frac{dh}{T} = c_p \frac{dT}{T}$, donc :

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_c}{dt} &= D_m c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + D_m' c_p \ln \left(\frac{T_2'}{T_1'} \right) \\ \frac{\delta S_c}{dt} &= g \lambda \ln \left(1 + \frac{T_1' - T_1}{T_1} \frac{\lambda' (1 - e^{-kL})}{\lambda' - \lambda e^{-kL}} \right) + g \lambda' \ln \left(1 + \frac{T_1' - T_1}{T_1'} \frac{\lambda (e^{-kL} - 1)}{\lambda' - \lambda e^{-kL}} \right) \end{aligned}$$

Un développement limité à l'ordre un donne :

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_c}{dt} &= g \lambda \frac{T_1' - T_1}{T_1} \frac{\lambda' (1 - e^{-kL})}{\lambda' - \lambda e^{-kL}} + g \lambda' \frac{T_1' - T_1}{T_1'} \frac{\lambda (e^{-kL} - 1)}{\lambda' - \lambda e^{-kL}} \\ \frac{\delta S_c}{dt} &= \frac{g \lambda \lambda' (T_1' - T_1) (1 - e^{-kL})}{\lambda' - \lambda e^{-kL}} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_1'} \right) \\ \frac{\delta S_c}{dt} &= \frac{g \lambda \lambda' (T_1' - T_1)^2 (1 - e^{-kL})}{T_1 T_1' (\lambda' - \lambda e^{-kL})} = \frac{g \lambda \lambda' (T_1' - T_1)^2 (e^{-L/\lambda'} - e^{-L/\lambda})}{T_1 T_1' (\lambda' e^{-L/\lambda'} - \lambda e^{-L/\lambda})} \end{aligned}$$

On obtient une expression symétrique en $\lambda \leftrightarrow \lambda'$. Si on suppose que $\lambda' > \lambda$ on vérifie que tous les termes de cette expression sont positifs et donc que **l'entropie créée est bien strictement positive**. Elle est nulle si et seulement si $T_1 = T_1'$.

On remarque que l'entropie créée n'est que du second ordre en $T_1' - T_1$, **ce qui signifie que pour les petites différences de températures l'échange devient réversible**. On peut aussi donner les formes asymptotiques :

- Si $kL \ll 1$ alors $\frac{\delta S_C}{dt} \approx \frac{gL(T_1' - T_1)^2}{T_1 T_1'}$
- Si $kL \gg 1$ alors $\frac{\delta S_C}{dt} \approx \frac{g\lambda(T_1' - T_1)^2}{T_1 T_1'}$

Si l'échange n'est pas isobare il faut rajouter les termes de pression :

$$\frac{\delta S_C}{dt} = D_m c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + D_m' c_p' \ln\left(\frac{T_2'}{T_1'}\right) + r \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) + r \ln\left(\frac{p_1'}{p_2'}\right)$$

Les deux termes rajoutés sont positifs car $p_1 - p_2 > 0$ et $p_1' - p_2' > 0$ (ce sont les pertes de charge dues à la viscosité des fluides).

L'entropie créée apparaît donc comme la somme de l'entropie créée par l'irréversibilité thermique et de l'entropie créée par l'irréversibilité mécanique, c'est-à-dire par l'ensemble des phénomènes diffusifs (diffusion de chaleur et diffusion de quantité de mouvement).