

# Nouvelle approche de l'étude thermodynamique des systèmes ouverts en PT et écoles d'ingénieurs

par **Jean-Noël BEURY**  
Lycée Gustave Eiffel - 33000 BORDEAUX  
jnbeury@laposte.net

---

## RÉSUMÉ

*La méthode actuellement enseignée en thermodynamique industrielle pour prendre en compte les irréversibilités dans un système est basée sur des hypothèses implicites qui sont en contradiction avec le premier principe. Nous montrerons les incohérences de cette méthode A dans le cas d'un échangeur thermique et les nombreuses erreurs d'interprétation physique.*

*Nous proposerons une nouvelle approche (méthode B) de l'étude des systèmes ouverts en se recentrant sur les fondamentaux de la thermodynamique. Cette méthode est entièrement conforme aux nouveaux programmes de PT et peut être appliquée dans les écoles d'ingénieurs, BTS, IUT...*

## 1. PRÉSENTATION ET UTILISATION DE LA MÉTHODE A

### 1.1. Présentation de la méthode A actuellement enseignée

En thermodynamique industrielle, on travaille très souvent avec des systèmes ouverts. Les causes d'irréversibilité ont plusieurs origines : détente dans le vide, surcharge brutale sur un piston, diffusion de particules, réactions chimiques, irréversibilité mécanique (frottements du fluide sur la paroi, frottements fluides internes), irréversibilité thermique (transfert thermique entre des systèmes à des températures différentes)...

Dans les Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles PT et dans les écoles d'ingénieurs, l'irréversibilité en thermodynamique industrielle est très souvent traitée en utilisant  $q_f$ .

**On rencontre dans la littérature les présentations suivantes pour introduire  $q_f$  :**

#### 1.1.1. Première présentation (référence [1])

On envisage une transformation irréversible de l'état 1 à l'état 2 d'un système ouvert en régime permanent d'écoulement, à une entrée et une sortie.

On définit (voir annexe 1) :

- $\delta w_i$  = **travail indiqué** massique (travail reçu par unité de masse de fluide de la part des parties mobiles de la machine).
- $\delta q_e$  = transfert thermique massique reçu (**échangé avec l'extérieur**) à travers toute la frontière du système ouvert.
- $\delta q_f$  = quantité de chaleur massique dissipée par frottement ( $\delta q_f \geq 0$ )

- $\delta w_f$  = travail massique des forces de frottement ( $\delta w_f \leq 0$ )

Le travail massique des forces intérieures de viscosité (forces de frottement) est transformé intégralement en chaleur massique de frottement :  $\delta w_f + \delta q_f = 0$ .

On remplace la transformation irréversible par une transformation réversible respectant les conditions suivantes :

- même loi de variation que la transformation réelle.
- chaleur massique de frottement  $\delta q_f$  supposée fournie à température variable (sans irréversibilité thermique) par une source fictive pour respecter la condition précédente.

Dans ces conditions, la chaleur reçue par le fluide est :  $\delta q = \delta q_e + \delta q_f$ . La variation d'entropie massique pour une transformation réversible est :  $ds = \frac{\delta q}{T} = \frac{\delta q_e + \delta q_f}{T}$ .

On a 3 équations :

$$\begin{cases} dh + de_c + de_p = \delta w_i + \delta q_e \\ dh = Tds + vdp \\ ds = \frac{\delta q_e + \delta q_f}{T} \text{ et } \delta q_f \geq 0 \end{cases}$$

La première équation est l'expression du premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert en régime permanent, à une entrée et une sortie (démonstration Annexe 1). La deuxième équation est l'identité thermodynamique qui est universelle : elle ne traduit que les propriétés thermodynamiques du fluide dans ses différents états.

### 1.1.2. Deuxième présentation (référence [2])

Le long d'une transformation réversible, on a par définition :  $ds = \frac{\delta q}{T}$ .

**Le long d'une transformation irréversible, on a recours à un « tour de passe-passe » en assimilant la chaleur générée par les frottements à un apport de l'extérieur  $\delta q_f$ .**  
**On pose  $ds = \frac{\delta q_e + \delta q_f}{T} = \delta s_e + \delta s_f$  avec  $\delta q_f > 0 \Rightarrow \delta s_f > 0$ .**

### 1.1.3. Questions découlant immédiatement de ces deux présentations

- $\delta q_f$  est fourni par une source extérieure. Pourquoi ne pas rajouter  $\delta q_f$  dans le premier principe alors qu'on le rajoute dans le second principe ?
- Pourquoi  $\delta q_e$  garderait-il la même valeur pour la transformation irréversible et la transformation réversible alors que  $\delta q_e$  dépend du chemin suivi ?

Dans l'épreuve de PT 2002 (voir référence [8]), question 4 : « Calculer la création d'entropie massique due à l'irréversibilité de l'évolution dans le compresseur ». L'étudiant doit donc calculer  $\delta s_c = \frac{\delta q_f}{T}$ .

On ne peut pas identifier l'entropie échangée massique à  $\frac{\delta q_e}{T}$  puisque pour une transformation monotherme (système en contact avec une source de chaleur à la température  $T_s$ ) elle vaut  $\frac{\delta q_e}{T_s}$ . De gros risques de confusions apparaissent !!! De même, l'entropie créée massique ne peut pas être identifiée à  $\frac{\delta q_f}{T}$ .

#### 1.1.4. Ces deux présentations sont incorrectes !!!

- Elles ne respectent pas les principes de base de la thermodynamique : le transfert thermique dépend du chemin suivi.
- On devrait tenir compte de tous les transferts thermiques échangés avec l'extérieur pour écrire le premier principe de la thermodynamique. Pourquoi ne pas rajouter  $\delta q_f$  dans le premier principe ?
- **Il est donc faux d'affirmer avec les présentations précédentes que « tout se passe comme si le fluide recevait un transfert thermique d'une source fictive extérieure correspondant à l'échauffement du fluide » puisqu'il faudrait rajouter  $\delta q_f$  dans le premier principe de la thermodynamique.**

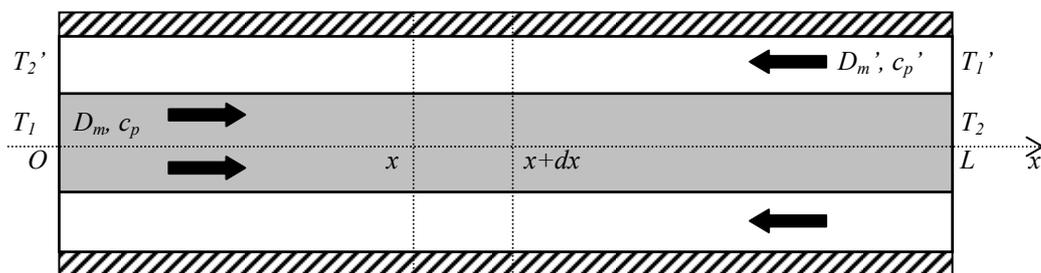
### 1.2. Utilisation de la méthode A

#### 1.2.1. Echangeur thermique calorifugé

On considère un échangeur thermique parfaitement calorifugé à contre courant en régime permanent. On note  $T_1$  et  $T_1'$  les températures, supposées connues, des fluides à l'entrée de l'échangeur,  $T_2$  et  $T_2'$  sont respectivement les températures à la sortie.

Le système ouvert étudié est un élément de longueur  $dx$  de la conduite 1→2. On note  $T(x)$  la température à l'abscisse  $x$ . La température à l'abscisse  $x$  de la conduite 1'→2' est notée  $T'(x)$ .

On fait l'étude en régime permanent. Il n'y a pas de partie mobile de la machine :  $\delta w_i = 0$ . On néglige les variations d'énergie cinétique et potentielle.



Les 3 équations de la méthode A s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} dh + \cancel{de_c} + \cancel{de_p} = \cancel{\delta w_i} + \delta q_e \\ dh = Tds + vdp \\ ds = \frac{\delta q_e + \delta q_f}{T} \end{array} \right. \quad \text{On a donc : } \left\{ \begin{array}{l} ds = \frac{\delta q_e}{T} + \frac{\delta q_f}{T} = \frac{dh}{T} + \frac{\delta q_f}{T} \\ ds = \frac{dh}{T} - \frac{v}{T} dp \end{array} \right.$$

On en déduit que  $\delta q_f = -vdp$  et  $\delta s_c = -\frac{vdp}{T}$

Dans un échangeur thermique (voir annexe 2), on rencontre deux types d'irréversibilité :

- **irréversibilité mécanique** (due à la viscosité du fluide). Elle se traduit par une baisse de pression (pertes de charge).

On peut montrer en mécanique des fluides que la viscosité des fluides peut s'interpréter par un phénomène de diffusion de quantité de mouvement engendré par un gradient de vitesse.

- **irréversibilité thermique** (diffusion de chaleur) : écart entre les températures des deux conduites. Le transfert thermique se fait spontanément du corps le plus chaud vers le corps le plus froid.

Ces deux types d'irréversibilité complètement indépendants sont dus aux phénomènes diffusifs (diffusion de quantité de mouvement et diffusion de chaleur).

En pratique, la baisse de pression n'est pas négligeable par rapport aux autres pertes de charge dans un circuit hydraulique mais le transfert thermique mis en jeu est négligeable par rapport au flux de chaleur échangé entre le fluide froid et le fluide froid. On a également une irréversibilité thermique (voir annexe 2 où il faudrait avoir un échangeur de très grande longueur).

**La méthode A donne  $\delta q_f = 0$  et  $\delta s_c = 0$  alors qu'on a une réversibilité mécanique et une irréversibilité thermique !!!**

### **1.2.2. Utilisation avec la méthode A de deux chemins pour aller de l'état 1 à l'état 2**

Actuellement, on utilise avec la méthode A deux chemins différents pour aller du même état initial au même état final :

Dans la référence [7] (Banque PT 1998) Question 6 : « Pour caractériser une compression adiabatique, on définit son rendement indiqué polytropique, noté  $\eta_{ikc}$  comme étant le rapport entre le travail indiqué massique, noté  $w_{ikc}$ , de la compression assimilée à une évolution polytropique réversible (non adiabatique) et le travail indiqué massique de la compression déterminé lors de la question 4a. »

**La transformation fictive réversible est donc déjà utilisée avec la méthode A pour calculer le travail de transvasement (voir paragraphe 3.5).**

### 1.3. Méthode A confrontée aux principes de la thermodynamique

#### 1.3.1. Définition de $q_f$

On considère un système ouvert en régime permanent d'écoulement, à une entrée et une sortie en contact avec une source de chaleur à la température  $T_S$  : la transformation est monotherme puisqu'on a une seule source de chaleur.

a) Le premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert s'écrit (voir annexe 1 pour la démonstration) :

$$(u_2 - u_1) + (e_{p2} - e_{p1} + e_{c2} - e_{c1}) = w_i + p_1 v_1 - p_2 v_2 + q_e$$

En notation infinitésimale, on a :  $du + de_c + de_p = \delta w_i - d(pv) + \delta q_e$

En posant  $h = u + pv$ , on obtient :  $\boxed{dh + de_c + de_p = \delta w_i + \delta q_e}$

avec

$\delta w_i$  = travail indiqué massique (travail massique reçu par le fluide de la part des parties mobiles de la machine).

$\delta q_e$  = transfert thermique massique algébriquement reçu (échangé avec l'extérieur) à travers toute la frontière du système ouvert.

b) Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :  $\boxed{de_c = \delta w_{ext} + \delta w_{int}}$

**TRAVAIL MASSIQUE DES FORCES EXTÉRIEURES :**

- Le travail massique du fluide amont et aval (voir démonstration annexe 1 avec  $p_1 v_1 - p_2 v_2$ ) est égal à  $-d(pv)$ .
- Le travail indiqué massique (travail massique reçu par le fluide de la part des parties mobiles de la machine) est égal à  $\delta w_i$ .
- Le travail des forces extérieures dérivant d'une énergie potentielle est à égal à  $-de_p$ .

**TRAVAIL MASSIQUE DES FORCES INTÉRIEURES :**

$\delta w_{int}$  = travail massique des forces intérieures = travail massique des forces intérieures de pression ( $p dv$  : voir les références [3] et [4] pour la démonstration de l'expression des forces intérieures de pression) + travail massique des forces intérieures de viscosité ( $\delta w_f \leq 0$ ).

$$\text{On a donc : } de_c = \{-d(pv) + \delta w_i - de_p\} + \delta w_{int} = \{-pdv - vdp + \delta w_i - de_p\} + pdv + \delta w_f$$

c) L'identité thermodynamique s'écrit :  $dh = Tds + vdp$

$$\text{On obtient finalement : } \begin{cases} dh + de_c + de_p = \delta w_i + \delta q_e & (1) \\ dh = Tds + vdp & (2) \\ de_c + de_p = -vdp + \delta w_i + \delta w_f & (3) \end{cases}$$

Des équations (1) et (3), on a :  $dh - vdp + \cancel{\delta w_i} + \delta w_f = \cancel{\delta w_i} + \delta q_e$

En utilisant (2), on a :  $Tds + \cancel{vdp} + \delta w_f - \cancel{vdp} = \delta q_e$

$$\text{Soit } Tds + \delta w_f = \delta q_e, \text{ d'où } ds = \frac{\delta q_e}{T} - \frac{\delta w_f}{T} \quad (4)$$

Le bilan d'entropie pour une transformation monotherme s'écrit :

$$ds = \delta s_e + \delta s_c = \frac{\delta q_e}{T_s} + \delta s_c \quad (5)$$

En identifiant les équations (4) et (5), on a :

$$\delta s_c = \frac{\delta q_e}{T} - \frac{\delta q_e}{T_s} - \frac{\delta w_f}{T} = \delta q_e \frac{(T_s - T)}{T T_s} - \frac{\delta w_f}{T}$$

Le bilan d'entropie s'écrit donc : 
$$ds = \left\{ \delta s_e \right\} + \left\{ \delta s_c \right\} = \left\{ \frac{\delta q_e}{T_s} \right\} + \left\{ \delta q_e \frac{(T_s - T)}{T T_s} - \frac{\delta w_f}{T} \right\} \quad (6)$$

#### Interprétation physique :

- le premier terme traduit l'entropie échangée : transfert thermique avec une source de chaleur à la température  $T_s$ .
- Le deuxième terme traduit l'entropie créée qui est bien la somme de deux contributions :  $-\frac{\delta w_f}{T} \geq 0$  irréversibilité mécanique et  $\delta q_e \frac{(T_s - T)}{T T_s} \geq 0$  irréversibilité thermique à cause d'un transfert thermique entre deux corps à des températures différentes.

On définit  $\delta q_f$  le transfert thermique massique dû aux frottements comme l'opposé du travail des forces intérieures de viscosité :  $\delta q_f = -\delta w_f$ . L'interprétation physique de  $\delta w_f$  est évidente (travail des forces intérieures de viscosité) alors que

l'interprétation physique de  $\delta q_f$  et de  $\frac{\delta q_f}{T}$  est beaucoup moins évidente comme on

va le voir...

L'équation (6) devient alors :

$$ds = \left\{ \delta s_e \right\} + \left\{ \delta s_c \right\} = \left\{ \frac{\delta q_e}{T_s} + \delta q_e \frac{(T_s - T)}{T T_s} \right\} + \left\{ \frac{\delta q_f}{T} \right\} = \left\{ \frac{\delta q_e}{T} \right\} + \left\{ \frac{\delta q_f}{T} \right\}$$

On définit le travail de transvasement massique par :

$$\delta w_t = -(\text{travail massique du fluide amont et aval} + \text{travail massique des forces intérieures de pression}) = -(-d(pv) + pdv) = \cancel{pdv} + vdp - \cancel{pdv} = vdp.$$

Interprétation physique dans le cas d'un compresseur avec  $de_c = de_p = 0$ . Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :  $\cancel{de_c} + \cancel{de_p} = -vdp + \delta w_i + \delta w_f$ , d'où  $\delta w_i = \delta w_t - \delta w_f$ , soit  $\delta w_i \geq \delta w_t$ . Le travail de transvasement correspond donc au travail minimum à fournir au compresseur pour vaincre le travail des forces de pression amont et aval, ainsi que le travail des forces intérieures de pression.

On verra au paragraphe 3.5 une interprétation physique plus simple du travail de transvasement

#### 1.3.2. Erreurs d'interprétation fréquemment rencontrées

- $ds = \frac{\delta q_e}{T} + \frac{\delta q_f}{T} = \delta s_e + \delta s_c$  avec  $\delta s_e = \frac{\delta q_e}{T}$  et  $\delta s_c = \frac{\delta q_f}{T}$ . Le premier terme représenterait l'entropie échangée et le deuxième terme l'entropie créée. C'est faux : le

terme  $\frac{\delta q_f}{T}$  représente l'irréversibilité uniquement d'origine mécanique alors que le terme  $\frac{\delta q_e}{T}$  n'a pas d'interprétation physique simple (il contient en fait l'entropie échangée et l'irréversibilité d'origine thermique).

- Les énoncés de concours et les présentations de la méthode A (voir paragraphe 1.1) suggèrent cette relation fautive :

- Voir référence [7] PT 1998 question 5.c : « Calculer  $q_f$  la quantité de chaleur massique due à l'irréversibilité ».

*Il faudrait plutôt écrire : « calculer  $q_f$  la quantité de chaleur massique due à l'irréversibilité mécanique ».*

- Voir référence [8] PT 2002 question 4 : « Calculer la création d'entropie massique due à l'irréversibilité de l'évolution dans le compresseur ». L'énoncé demande donc à l'étudiant de calculer  $\delta s_c = \frac{\delta q_f}{T}$ .

*Il faudrait plutôt écrire : « Calculer la création d'entropie massique due à l'irréversibilité mécanique de l'évolution dans le compresseur ».*

- On rencontre souvent  $\delta q_f = 0 \Leftrightarrow$  transformation réversible. Cette équivalence est fautive puisque  $\delta q_f$  ne mesure que l'irréversibilité d'origine mécanique. On peut donc avoir une transformation irréversible avec  $\delta q_f = 0$  !

*Il n'est donc plus étonnant d'avoir  $q_f = 0$  dans l'échangeur thermique du paragraphe 1.2.1 avec  $dp = 0$  mais par contre, il est faux d'écrire que l'entropie créée est nulle.*

*En réalité, dans cet exemple, on a :*

$$ds = \{\delta s_e\} + \{\delta s_c\} = \left\{ \frac{\delta q_e}{T_s} \right\} + \left\{ \delta q_e \frac{(T_s - T)}{T T_s} - \cancel{\frac{\delta w_f}{T}} \right\} = \frac{\delta q_e}{T} = \frac{dh}{T}. \text{ L'entropie créée vaut}$$

*donc :  $\delta s_c = \delta q_e \frac{(T_s - T)}{T T_s}$  !!! Ce résultat est complètement masqué avec la méthode A.*

### 1.3.3. Problèmes pédagogiques liés à l'utilisation de $q_f$

- La méthode A est très délicate à introduire correctement car la démonstration faite dans le paragraphe 1.3.1 est hors de propos pour les élèves : le travail des forces de pression intérieure (avec risques de confusion entre  $p dv$  et  $-p dv$ ) et le théorème de l'énergie cinétique pour un système ouvert sont hors programme en PT.
- On se contente souvent des présentations faites dans le paragraphe 1.1 qui contiennent de nombreuses contradictions. Les étudiants ont l'impression que la thermodynamique est un tour de passe-passe alors qu'au contraire elle est rigoureuse.
- Sans précaution, on peut très facilement faire des erreurs d'interprétation physique. La rédaction même des problèmes de concours (cf références [7] et [8]) laisse supposer que  $\delta s_e = \frac{\delta q_e}{T}$  et  $\delta s_c = \frac{\delta q_f}{T}$ .

- **Utiliser simultanément l'entropie créée et  $\delta q_f$  pose problème puisque  $\delta q_f$  masque complètement l'entropie créée d'origine thermique.**

- On ne peut pas interpréter  $q_f$  par la phrase : « Tout se passe comme si le fluide recevait un transfert thermique massique  $q_f$  correspondant à l'échauffement du fluide à cause des frottements fluides internes (forces de viscosité) » car elle fait référence au paragraphe 1.1 qui est faux. Cette interprétation est pourtant facilement compréhensible par les étudiants !!!
- Un autre problème pédagogique apparaît avec l'utilisation de  $\delta q_f$  : Les étudiants se trouvent confrontés à deux relations pour écrire le bilan d'entropie :  $ds = \frac{\delta q_e}{T} + \frac{\delta q_f}{T}$  et  $ds = \delta s_e + \delta s_c = \frac{\delta q_e}{T_s} + \delta s_c$  (pour une transformation monotherme). Laquelle choisir dans un exercice ?

## 2. QUELQUES REMARQUES CONCERNANT LA RÉFORME DE 1995 DES PROGRAMMES DE THERMODYNAMIQUE EN CPGE

### 2.1. Présentation de la réforme de 1995

L'enseignement de la thermodynamique en MP, PC et PSI a beaucoup évolué en 1995 suite à la réforme des programmes inspirés par Hubert Gié, Inspecteur Général de l'Education Nationale : la relation  $ds = \frac{\delta q_{rev}}{T}$  a été remplacée par l'identité thermodynamique pour les calculs d'entropie. **L'entropie échangée et l'entropie créée se trouvent au cœur du bilan d'entropie.** La compréhension des phénomènes physiques s'en trouve facilitée pour les étudiants. Les équations de base sont devenues le premier principe de la thermodynamique, le second principe de la thermodynamique et l'identité thermodynamique (cf référence [6]).

Pour un système ouvert, on a donc :

$$\begin{cases} dh + de_c + de_p = \delta w_i + \delta q_e \\ ds = \delta s_e + \delta s_c \\ dh = Tds + vdp \end{cases}$$

Prenons le cas d'un gaz parfait pour illustrer le bilan d'entropie qui se fait très simplement :

1) Calcul de la variation d'entropie :  $dh = Tds + vdp = c_p dT$ , d'où

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - \frac{v}{T} dp = c_p \frac{dT}{T} - r \frac{dp}{p} \text{ et } \Delta s = s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - r \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

2) Calcul de l'entropie échangée. Elle est nulle si la transformation est adiabatique. Pour une transformation monotherme, on a  $\delta s_e = \frac{\delta q_e}{T_s}$ .

3) On en déduit immédiatement l'entropie créée massique :  $\delta s_c = ds - \delta s_e$  avec son interprétation physique immédiate : l'entropie créée est strictement positive pour une transformation irréversible et nulle pour une transformation réversible.

## 2.2. Programmes de PT 2004

On trouve dans les nouveaux programmes de PT 2004 (cf référence [9]) les phrases suivantes :

- « Formulation du second principe pour un système ouvert simple en régime permanent, à une entrée et une sortie :  $ds = \delta s_e + \delta s_c$  ».
- « La représentation de l'entropie générée par les frottements n'est pas exigible ».

La relation  $ds = \frac{\delta q_e}{T} + \frac{\delta q_f}{T}$  ne figure donc pas explicitement au programme.

On retrouve donc la même approche dans la filière PT que dans les filières MP, PC et PSI. La connaissance de  $q_f$  et de l'entropie générée par les frottements est importante pour la description d'une machine adiabatique irréversible en thermodynamique industrielle.

**Le programme de PT met au premier plan l'entropie échangée et l'entropie créée pour les systèmes ouverts. Nous allons voir que l'on peut se contenter de la relation  $ds = \delta s_e + \delta s_c = \frac{\delta q_e}{T_s} + \delta s_c$  et ne pas aborder la discussion délicate avec  $ds = \frac{\delta q_e}{T} + \frac{\delta q_f}{T}$  pour traiter les systèmes ouverts. On pourra même reprendre l'interprétation physique de la méthode A !!!**

## 3. MISE EN PLACE DE LA MÉTHODE B

Soit un système ouvert en **régime permanent d'écoulement**, à une entrée et une sortie.

### 3.1. Rappel des équations de la méthode A

La méthode A, actuellement utilisée est basée sur les équations suivantes :

$$\begin{aligned}dh + de_c + de_p &= \delta w_i + \delta q_e \\dh &= Tds + vdp \\ds &= \frac{\delta q_e + \delta q_f}{T} \\ \delta w_t &= vdp\end{aligned}$$

**Le bilan d'entropie pour tous les systèmes ouverts se fait donc avec la relation :  $ds = \frac{\delta q_{rev}}{T} = \frac{\delta q_e + \delta q_f}{T}$  qui n'est pas conforme au programme PT 2004 (cf référence [9]) puisqu'on utilise systématiquement une transformation réversible ! On perd également l'entropie échangée et l'entropie créée.**

La technique utilisant une transformation réversible était utilisée systématiquement pour les systèmes fermés avant la réforme de 1995 !

## 3.2. Mise en place de la méthode B

### 3.2.1. Cas général

Pour la transformation réelle (réversible ou irréversible), on peut écrire le premier principe (cf annexe 1 pour la démonstration), le second principe de la thermodynamique, l'identité thermodynamique et le travail de transvasement massique.

$$\begin{aligned} dh + de_c + de_p &= \delta w_i + \delta q_e \\ ds &= \delta s_e + \delta s_c \\ dh &= Tds + vdp \\ \delta w_t &= vdp \end{aligned}$$

$\delta w_i$  est le travail indiqué massique pour la transformation réelle (travail massique reçu par le fluide de la part des parties mobiles de la machine).

$\delta q_e$  est le transfert thermique massique reçu (échangé avec l'extérieur) à travers toute la frontière du système ouvert.

Dans l'annexe 1, on a vu que l'on peut se ramener à un système fermé. Dans ce cas, l'entropie échangée est le transfert thermique divisé par  $T_{\Sigma}$ , la température de la surface d'échange (c'est-à-dire la surface ( $\Sigma'$ ) du volume de contrôle) à travers laquelle se fait le transfert thermique :

$$\delta S_e = -\oint_{\Sigma'} \frac{\vec{j}_S \cdot d\vec{S}_{ext}}{T_{\Sigma'}} dt$$

L'avantage de cette définition est d'avoir une seule expression de l'entropie échangée, même si les deux systèmes qui interagissent ne sont pas à l'équilibre thermique. On suppose simplement l'équilibre thermodynamique local réalisé au voisinage de la surface.

On rencontre très souvent les cas particuliers suivants :

- Pour une transformation adiabatique :  $\delta S_e = 0$  et donc  $\delta s_e = 0$ .
- Le système échange de la chaleur avec une source de chaleur (voir référence [6] : système fermé n'échangeant aucun travail et capable de fournir un transfert thermique sans que sa température  $T_S$  varie. La transformation est monotherme.

L'entropie échangée vaut :  $\delta S_e = \frac{\delta Q_e}{T_S}$ . En grandeurs massiques, on a :

$$\delta s_e = \frac{\delta q_e}{T_S}$$

- Si le système échange de la chaleur avec un autre système dont la température varie, on peut utiliser la notion de pseudo-source de chaleur (voir référence [6]).

L'entropie créée est notée  $\delta S_c$ . En grandeurs massiques, on définit  $\delta s_c$  l'entropie créée massique. L'entropie créée massique est calculée entre deux états d'équilibre du système par sa définition :  $\delta s_c = ds - \delta s_e$ .

Interprétation physique :

- $\delta s_c > 0$  pour une transformation irréversible
- $\delta s_c = 0$  pour une transformation réversible.

En thermodynamique industrielle, on a très souvent  $de_c$  et  $de_p$  nuls ou négligeables sauf pour les gaz en sortie de tuyère.

On peut remarquer que la relation  $ds = \frac{\delta q_{rev}}{T} = \frac{\delta q_e + \delta q_f}{T}$  a été remplacée par l'identité thermodynamique pour les calculs d'entropie (cf paragraphe 2.1). L'enthalpie est un paramètre énergétique essentiel en thermodynamique industrielle. L'entropie échangée et l'entropie créée se trouvent au cœur de l'étude du système (conforme au programme PT 2004 cf référence [9]).

**Ces 4 relations suffisent pour presque toutes les applications réversibles ou irréversibles rencontrées en thermodynamique industrielle (avec les hypothèses : système ouvert en régime permanent d'écoulement, à une entrée et une sortie).**

**Dans certaines transformations adiabatiques irréversibles (compresseurs, turbines...), on tient compte des irréversibilités mécaniques dues aux forces de frottements internes (forces de viscosité). Elles se traduisent par un travail des forces intérieures de viscosité ( $\delta w_f \leq 0$ ). Ce travail des forces intérieures se manifeste par une dissipation d'énergie et donc un échauffement du fluide. On définit  $\delta q_f$  le transfert thermique massique dû aux frottements comme l'opposé du travail massique des forces intérieures de viscosité  $\delta q_f = -\delta w_f$ . On cherchera donc dans ces applications à calculer  $q_f \geq 0$  et l'entropie générée par les frottements. On va voir une technique permettant de répondre à ces deux questions.**

### 3.2.2. Cas particulier d'une transformation adiabatique irréversible où le calcul de $q_f$ est nécessaire

On ne connaît pas en général le chemin effectivement suivi par la transformation réelle. On cherche parfois à la modéliser par une autre transformation (on verra que c'est souvent une polytropicque) avec deux chemins différents pour aller du même état initial au même état final. L'objectif est de calculer  $q_f$  et l'entropie générée par les frottements.

Dans ce cas, on mettra en évidence **deux chemins** (transformation **réelle irréversible** et transformation **FICTIVE réversible**) pour aller du même état initial au même état final. On a les mêmes  $dh$ ,  $de_c$ ,  $de_p$ ,  $ds$  car  $h$ ,  $e_c$ ,  $e_p$  et  $s$  sont des fonctions d'état et leurs variations ne dépendent pas du chemin suivi.

- Pour la transformation **REELLE irréversible**, on écrit (comme dans le paragraphe 3.2.1) le premier, le second principe de la thermodynamique ainsi que l'identité thermodynamique

$$dh + de_c + de_p = \delta w_i + \delta q_e$$

$$ds = \delta s_e + \delta s_c$$

$$dh = Tds + vdp$$

$$(\delta w_i = vdp)$$

Il est très souvent inutile d'écrire le travail de transvasement massique car on ne connaît pas en général le chemin effectivement suivi par la transformation réelle.

- Pour la transformation **FICTIVE réversible**, on écrit l'identité thermodynamique, le premier principe, le second principe de la thermodynamique et éventuellement (si nécessaire) le travail de transvasement fictif. Pour cette transformation FICTIVE réversible, on définit un travail indiqué massique réversible  $\delta w_{i \text{ rev}}$  noté  $\delta w_{if}$  et un transfert thermique massique réversible  $\delta q_{e \text{ rev}}$  noté  $\delta q_{ef}$ . On note :

$\delta w_{if}$  = travail indiqué massique fictif (calculé sur la transformation FICTIVE réversible)  
 $\delta w_{tf}$  = travail de transvasement massique fictif (calculé sur la transformation FICTIVE réversible)  
 $\delta q_{ef}$  = **transfert thermique massique fictif (calculé sur la transformation FICTIVE réversible).**

$$\begin{aligned} dh + de_c + de_p &= \delta w_{if} + \delta q_{ef} \\ dh &= Tds + vdp \\ ds &= \frac{\delta q_{ef}}{T} \\ \delta w_{tf} &= vdp \end{aligned}$$

Souvent la **transformation fictive est une polytropique**, on remplacera l'**indice f** par l'**indice k** comme c'est l'usage en thermodynamique industrielle. Cette notation a déjà été utilisée avec la méthode A : voir paragraphe 1.2.2.

### 3.3. Avantages d'utiliser la méthode B

- On a une présentation unitaire de la thermodynamique pour les systèmes fermés et ouverts en gardant les fondamentaux de la thermodynamique : premier principe, second principe, identité thermodynamique, entropie échangée et entropie créée.
- Les étudiants peuvent comprendre très facilement les notions introduites. La démonstration du premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert en régime permanent à une entrée et une sortie est au programme (cf annexe 1).
- La transformation fictive n'est utilisée que lorsque c'est absolument nécessaire (modélisation par une polytropique par exemple). Les notations employées pour la transformation fictive sont transposées de la transformation réelle. Il n'y a pas de confusion possible. On dissocie bien la transformation réelle de la transformation FICTIVE.

### 3.4. Interprétation physique

#### 3.4.1. Interprétation physique de $q_f$

Rappelons que l'on applique cette transformation fictive réversible uniquement pour des transformations réelles adiabatiques :

La méthode A donne :  $ds = \frac{\cancel{\delta q_e} + \delta q_f}{T}$ . La méthode B donne :  $ds = \frac{\delta q_{ef}}{T}$

Les deux grandeurs  $\delta q_f$  et  $\delta q_{ef}$  sont donc égales puisque la variation d'entropie ne dépend pas du chemin suivi.

**Pour répondre aux questions des problèmes de concours concernant  $q_f$ , il suffit donc :**

- de calculer  $q_{ef}$  avec la méthode B
- et d'écrire à la fin des calculs que  $q_f = q_{ef}$ .

**INTERPRETATION PHYSIQUE DE  $q_f = q_{ef}$  : tout se passe comme si le fluide recevait un transfert thermique massique  $q_f$  correspondant à l'échauffement du fluide à cause des frottements fluides internes (forces de viscosité).**

On a vu que l'interprétation était incorrecte avec la méthode A alors qu'elle devient correcte avec la méthode B !

### 3.4.2. Quelle est l'entropie générée par les frottements ?

Pour la transformation réelle, on a :  $ds = \cancel{\delta s_e} + \delta s_c$ . Pour la transformation fictive

réversible, on a :  $ds = \frac{\delta q_{ef}}{T}$ .

On a donc  $q_f = q_{ef} > 0$  et une **entropie créée strictement positive**.

C'est tout à fait cohérent. La seule cause d'irréversibilité ici est d'origine mécanique puisque la transformation est adiabatique.

## 3.5. Application de la méthode B à un compresseur réel adiabatique irréversible.

### 3.5.1. Compresseur adiabatique réversible

Un **compresseur** est un organe mécanique destiné à augmenter par un procédé uniquement mécanique la pression d'un fluide. On veut faire passer la pression du fluide de  $p_1$  à  $p_2$  avec  $p_2 > p_1$ . Les compresseurs sont utilisés dans de nombreuses applications industrielles : réfrigération, compresseur à air. Les compresseurs peuvent être regroupés en deux grandes catégories :

- les **compresseurs volumétriques** : le fluide est emprisonné dans un volume fermé que l'on réduit pour réaliser la compression.
- les **turbocompresseurs ou compresseurs à aubages**. On a un mouvement continu du fluide. La compression est obtenue en convertissant l'énergie cinétique communiquée au fluide en pression par des aubages mobiles. On a donc un système ouvert (machine avec transvasement). Le système considéré sera un gaz.

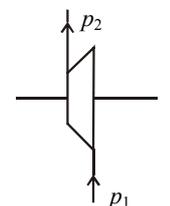


Schéma d'un compresseur

On étudiera dans cet article uniquement les turbocompresseurs. Ce sont des machines compactes avec des surfaces d'échange faibles et des coefficients d'échange thermique faibles (pour un gaz). On suppose donc très souvent la compression adiabatique. Dans ce paragraphe, on suppose la transformation réversible. On néglige les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle.

On appelle par définition le travail de transvasement massique :  $w_t \stackrel{def}{=} \int_1^2 v dp$ .

Les relations fondamentales s'écrivent :

$$\begin{cases} dh + \cancel{de_c} + \cancel{de_p} = \delta w_i + \cancel{\delta q_e} \\ dh = T ds + v dp \\ ds = \frac{\delta q_e}{T} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} dh = \delta w_i \\ dh = v dp \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que  $\delta w_i = v dp = \delta w_t$  et  $\Delta h = w_i = w_t = \int_1^2 v dp$

**Pour un compresseur :  $w_i > 0$ . Le travail de transvasement correspond au travail que l'on doit fournir au compresseur réversible pour faire passer 1 kg de fluide de la pression  $p_1$  à la pression  $p_2$ .**

*Interprétation graphique dans le diagramme (T, s) :*

La transformation est adiabatique réversible, donc isentropique.

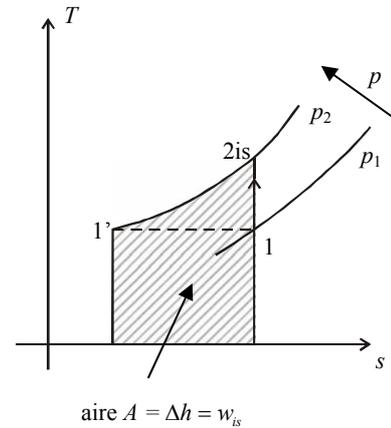
**On définit le point 1'** tel que  $h_{1'} = h_1$ , c'est-à-dire  $T_{1'} = T_1$  pour un gaz parfait.

Le travail indiqué massique  $w_i$  est noté  $w_{is}$  : travail indiqué massique isentropique.

Sur l'isobare  $p_2$  :

$$dh = T ds + v dp, \text{ d'où } h_{2is} - h_{1'} = \int_{1'}^{2is} T ds = \text{aire } A$$

On a donc :  $w_{is} = \Delta h = h_{2is} - h_{1'} = w_{ts} = h_{2is} - h_1 = \text{aire } A$

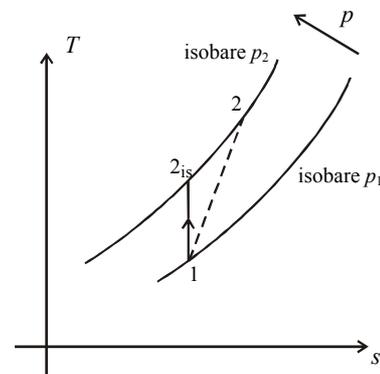


### 3.5.2. Présentation du compresseur réel adiabatique

Dans un compresseur réel, il faut tenir compte des forces de viscosité (frottements fluides internes). On a donc une irréversibilité mécanique.

a) On considère une compression adiabatique réversible (donc isentropique) de la **même pression initiale  $p_1$**  à la **même pression finale  $p_2$** . L'état final est noté 2is.

On a une augmentation de la température lors de la compression, donc  $T_{2is} > T_1$ . On se déplace sur une verticale dans le diagramme (T, s).



b) La transformation réelle est irréversible : on la représente en traits pointillés. Le fluide passe de la pression  $p_1$  à la pression  $p_2$ . A cause des forces de viscosité (frottements fluides internes), il y a dissipation d'énergie et donc échauffement du fluide.

**La température finale  $T_2$  (pour la transformation réelle) est plus grande que la température  $T_{2is}$  (pour la transformation isentropique) :  $T_2 > T_{2is}$ .**

On envisage 2 chemins pour aller de l'état 1 à l'état 2 :

- **transformation réelle adiabatique irréversible.**
- **transformation FICTIVE réversible 1 → 2** qui a le même état initial 1 ( $T_1, p_1$ ) et le même état final 2 ( $T_2, p_2$ ). Le gaz reçoit de l'extérieur  $q_{ef} > 0$  : **transfert thermique** massique reçu pour la transformation FICTIVE réversible correspondant à **l'échauffement du fluide.**

**INTERPRETATION PHYSIQUE : tout se passe comme si le fluide recevait un transfert thermique massique  $q_f = q_{ef}$  correspondant à l'échauffement du fluide à cause des frottements fluides internes (forces de viscosité).**

<b>Transformation réelle :</b>	$\begin{cases} \Delta h = w_i + \cancel{q_e} \\ \Delta s = \cancel{s_e} + s_c \end{cases} \quad (q_e = 0 \text{ et } s_e = 0 \text{ car adiabatique})$
<b>Transformation FICTIVE, réversible :</b>	$\begin{cases} dh + \cancel{de_c} + \cancel{de_p} = \delta w_{if} + \delta q_{ef} \\ dh = Tds + vdp \\ ds = \frac{\delta q_{ef}}{T} \\ w_{tf} = \int_1^2 vdp \end{cases}$

donc 
$$\begin{cases} \Delta h = w_{if} + q_{ef} \\ ds = \frac{\delta q_{ef}}{T} > 0 \end{cases}$$

**Bilan :** On a le même  $\Delta h$  et  $\Delta s$  pour la transformation réelle et la transformation FICTIVE réversible puisqu'on a des variations de fonctions d'état avec le même état initial ( $T_1, p_1$ ) et le même état final ( $T_2, p_2$ ).

$$\Delta h = w_i > 0, \text{ d'où } \begin{cases} \Delta h = w_i = w_{if} + q_{ef} = w_{tf} + q_{ef} \\ q_{ef} = \int_1^2 T ds \end{cases}$$

$\Delta h = h_2 - h_1$  peut être calculé avec le modèle du gaz parfait ou avec des tables, diagrammes thermodynamiques.

**On va voir 3 méthodes pour calculer  $q_f$ .**

### 3.5.3. Calcul de $q_f$ avec une transformation FICTIVE réversible, polytropique, gaz parfait.

Dans de nombreux problèmes de concours PT (1998, 2002...), on modélise la transformation réelle irréversible par une transformation FICTIVE réversible, polytropique avec un gaz parfait. On connaît l'état initial ( $T_1, p_1$ ) et l'état final ( $T_2, p_2$ ). On peut mesurer facilement les températures et les pressions avec des capteurs. Pour calculer  $k$ , il suffit d'écrire la relation  $Tp^{\frac{1-k}{k}} = cte$  pour l'état 1 et pour l'état 2.

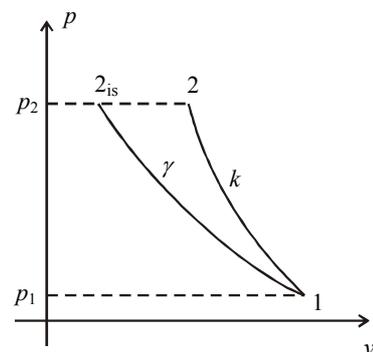
On peut démontrer (voir Annexe 3) que  $k = \frac{\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}{\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) + \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}$

On a :  $k > \gamma$  pour une compression et  $k < \gamma$  pour une détente.

*Démonstration dans le cas particulier d'une compression adiabatique réversible avec un gaz parfait pour la transformation  $1 \rightarrow 2_{is}$*

*Graphiquement, on représente dans le diagramme ( $p, v$ ) la transformation réversible  $1 \rightarrow 2_{is}$  et la transformation polytropique (d'indice  $k$ ) réversible  $1 \rightarrow 2$  (qui modélise la transformation réelle). On a vu que  $T_2 > T_{2is}$ . Comme  $p_2 = p_{2is}$ , on a donc  $v_2 > v_{2is}$  (car  $p v = r T$  pour un gaz parfait).*

*La pente de la transformation  $1 \rightarrow 2$  est donc plus grande que la pente de la transformation  $1 \rightarrow 2_{is}$  et donc  $k > \gamma$ .*



L'indice  $f$  peut être remplacé par  $k$  pour rappeler que l'on travaille sur une transformation polytropique.

a) Calcul du travail de transvasement polytropique :

La transformation polytropique est caractérisée par :

$p v^k = cte = p_1 v_1^k = p_2 v_2^k$ , donc  $v = A p^{\frac{1}{k}}$  avec  $A$  une constante.

$w_{tk} = \int_1^2 v dp = \int_1^2 A p^{\frac{1}{k}} dp = -A \left[ \frac{p^{\frac{1}{k}+1}}{\frac{1}{k}+1} \right]_1^2 = \frac{Ak}{k-1} \left( p_2^{\frac{1}{k}+1} - p_1^{\frac{1}{k}+1} \right)$ . On peut rentrer  $A$  dans la

parenthèse, on obtient alors :  $w_{tk} = \frac{k}{k-1} (p_2 v_2 - p_1 v_1)$ .

Finalement, on a :  $w_{tk} = \frac{kr}{k-1} (T_2 - T_1)$ .

b) Calcul de  $w_i$  :  $w_i = \Delta h = c_p (T_2 - T_1)$

c) On en déduit :  $q_{ef} = w_i - w_{tk}$

$$\text{D'où } q_f = q_{ef} = w_i - w_{tk} = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) - \frac{kr}{k - 1}(T_2 - T_1) \quad (1^{\text{ère}} \text{ méthode de calcul de } q_f)$$

On a vu dans le paragraphe 3.5.2 que  $q_f > 0$  ainsi que son interprétation physique.

La relation entre le travail indiqué et le travail de transvasement figure explicitement au programme de PT avec son interprétation physique :  $w_i > w_{tk}$  (cf référence [9]).

*Remarque : le calcul de  $q_f = q_{ef}$  peut se faire également en utilisant la relation  $Tds = cdT$  (voir problème de la banque PT 1998 Première partie cf référence [7]).*

On en déduit immédiatement :  $q_f = q_{ef} = \int_1^2 Tds = c(T_2 - T_1)$  (2<sup>ème</sup> méthode de calcul de  $q_f$ )

*Cette relation ne figure évidemment pas au programme PT mais peut être abordée dans un problème de concours.*

**L'intérêt de la polytropique vient justement de la facilité à calculer  $q_f$ .**

*Remarques concernant la polytropique pour les gaz parfaits :*

Selon les auteurs, la polytropique est une transformation adiabatique irréversible, tandis que pour d'autres elle est par définition réversible. On peut montrer (cf référence [5]) que ces deux approches sont rigoureusement équivalentes pour les gaz parfaits.

Prenons l'exemple de la question 5 du problème de la banque PT 1998 (cf référence [7]) : on travaille avec une transformation polytropique adiabatique irréversible d'exposant  $k$ . L'énoncé demande de calculer la quantité de chaleur massique due à l'irréversibilité :  $q_f$ .

- La méthode A donne :  $dh = Tds + vdp = \delta q_f + \delta w_t$ . On en déduit :  $q_f = \Delta h - w_{tk}$
- Il suffit là encore d'appliquer la méthode B : on travaille sur une transformation fictive polytropique réversible. On obtient immédiatement :  
 $\Delta h = q_{ek} + w_{ik} = q_{ek} + w_{tk}$  car  $dh = Tds + vdp = \delta q_{ef} + \delta w_t$

On obtient le même résultat :  $q_f = \Delta h - w_{tk}$ .

### 3.5.4. Évaluation graphique des transferts thermiques et de la création d'entropie

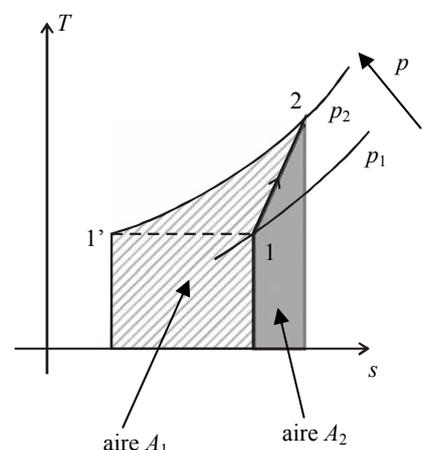
Dans certaines applications, on ne modélise pas explicitement par une polytropique mais on s'intéresse à une représentation graphique dans le diagramme  $(T, s)$ .

On définit le point 1' tel que  $h_{1'} = h_1$ , c'est-à-dire  $T_{1'} = T_1$  pour un gaz parfait.

On a vu dans le paragraphe 3.5.2 que :

On a :  $q_{ef} = \int_1^2 Tds = \text{aire } A_2$  et  $w_{if} = w_{tf}$ .

$$\Delta h = w_i = w_{tf} + q_{ef}$$



Or  $w_i = \Delta h = h_2 - h_1 = h_2 - h_{1'}$ , = aire sous la courbe  $1' \rightarrow 2$  = aire  $A_1 + A_2$

donc  $A_1 + A_2 = w_{ff} + A_2$ , d'où  $w_{ff} = \text{aire } A_1$

**Conformément au programme PT (cf référence [9]), on peut linéariser la partie**

**1→2 :**  $q_f = q_{ef} = \text{aire } A_2 = \text{aire du trapèze} = (s_2 - s_1) \frac{T_1 + T_2}{2}$  (3<sup>ème</sup> méthode de calcul de  $q_f$ )

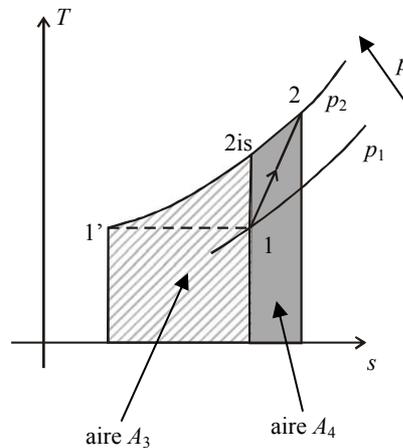
**L'entropie générée par les frottements vaut donc :**  $\Delta s = s_c = s_2 - s_1 = \frac{2q_f}{T_1 + T_2}$

### 3.5.5. Comment justifier graphiquement que $w_i \text{ réel} > w_{is}$ ?

On représente très souvent sur les diagrammes la compression isentropique  $1 \rightarrow 2_{is}$ .

On a vu que :

- $w_{is} = h_{2_{is}} - h_1 = h_{2_{is}} - h_{1'}$ , = aire hachurée  $A_3$
- $w_{i \text{ réel}} = h_2 - h_1 = h_2 - h_{1'}$ , = aire sous la courbe  $1' \rightarrow 2$  = aire  $A_3 + A_4$



On peut donc conclure que :  $w_{i \text{ réel}} > w_{is}$  :  $\begin{cases} w_{is} = \text{aire hachurée } A_3 \\ w_{i \text{ réel}} = \text{aire } A_3 + A_4 \end{cases}$

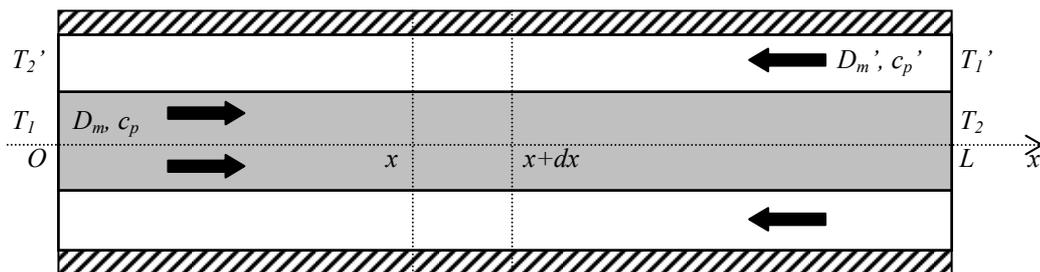
**Interprétation physique :** Il faut fournir plus de travail au compresseur fonctionnant entre deux pressions fixées avec une transformation irréversible qu'avec une transformation isentropique : le travail de transvasement isentropique apparaît donc comme le travail minimal à fournir à un compresseur fonctionnant entre deux pressions fixées.

*Remarque :* On pourrait envisager une compression isotherme (en refroidissant au cours de la transformation) mais cette compression n'existe pas en pratique. On peut être amené à refroidir quand on passe d'un étage de compression à un autre étage de compression. Lorsque cette compression isotherme intervient dans les exercices, on la considère comme réversible (liquéfaction de l'azote par le procédé Linde-Hampson par exemple).

### 3.6. Application de la méthode B à l'échangeur thermique possédant des irréversibilités thermiques.

On reprend l'échangeur à contre courant étudié dans le paragraphe 1.2.1. La méthode B est appliquée simplement pour montrer qu'elle donne une interprétation physique aisée alors que l'interprétation physique avec la méthode A était délicate.

Le fluide dans la conduite 1→2 passe de l'état 1 ( $p_1, T_1$ ) à l'état 2 ( $p_2, T_2$ ). On néglige la baisse de pression ( $p_1 = p_2$ ) et on étudie le cas particulier où il se réchauffe. L'échange thermique étant irréversible, la température  $T'(x)$  (température à l'abscisse  $x$  de la conduite 1'→2') est nécessairement supérieure à  $T(x)$  (température à l'abscisse  $x$  de la conduite 1→2). On considère un élément de longueur  $dx$  de la conduite 1→2 à l'abscisse  $x$  :



Pour la transformation **REELLE irréversible**, on a :

$$\begin{cases} dh + \cancel{de_c} + \cancel{de_p} = \cancel{\delta w_i} + \delta q_e \\ ds = \delta s_e + \delta s_c = \frac{\delta q_e}{T'} + \delta s_c \quad (\delta w_i = 0 \text{ car pas de partie mobile de la machine}) \\ dh = T ds + v d\rho \end{cases}$$

On en déduit la variation d'entropie massique :  $\Delta s = \int_1^2 \frac{dh}{T} - \int_1^2 \frac{v d\rho}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dh}{T}$

L'entropie échangée massique vaut  $s_e = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dh}{T'}$

L'entropie créée massique vaut :  $s_c = \Delta s - s_e = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dh}{T} - \int_{T_1}^{T_2} \frac{dh}{T'} = \int_{T_1}^{T_2} dh \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right)$

Comme  $T' > T$  et  $dh > 0$ , on a donc  $s_c > 0$ .

*Remarque : On obtient le même résultat avec un refroidissement du fluide dans la conduite 1→2 avec  $T' < T$  et  $dh < 0$ .*

**L'application de la méthode B donne donc des résultats tout à fait cohérents alors que la méthode A aboutissait à  $q_f = 0$ .**

*Remarque : Si on a une irréversibilité thermique et une irréversibilité mécanique, on a alors  $s_c = \Delta s - s_e = \left( \int_{T_1}^{T_2} dh \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right) \right) + \left( \int_1^2 \frac{-v d\rho}{T} \right)$ .*

*Interprétation physique :*

L'entropie créée est égale à la somme de deux termes :

- Le premier terme est positif  $\int_{T_1}^{T_2} dh \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right)$ . Il traduit l'irréversibilité thermique (diffusion de chaleur).

- Le deuxième terme est positif : l'irréversibilité mécanique (due à la viscosité du fluide) se traduit par une baisse de pression.

*Conclusion : en pratique, la mise en équation des échangeurs se fait **en étudiant simultanément les évolutions de l'état des deux fluides** (voir annexe 2). L'objet de ce paragraphe est simplement de montrer que les problèmes d'interprétation rencontrés avec la méthode A n'existent plus avec la méthode B. On retrouve bien les deux sources d'irréversibilité dues aux phénomènes diffusifs (diffusion de chaleur et diffusion de quantité de mouvement).*

### 3.7. Bilan de la méthode B

- La méthode B peut être comprise par les étudiants en PT puisque la démonstration (cf annexe 1) du premier principe dans le cas d'un système ouvert en régime permanent d'écoulement, à une entrée et une sortie est au programme PT (cf référence [9]).

• **Le seul résultat à admettre pour les étudiants en PT (voir démonstration paragraphe 3.4) est que pour une transformation adiabatique :  $q_f = q_{ef}$ .**

- Avec la méthode B, on n'a plus besoin de définir le terme  $\frac{\delta q_f}{T}$  puisqu'il suffit de calculer l'entropie créée, l'étude concernant exclusivement des transformations adiabatiques. D'ailleurs, on trouve la phrase suivante dans les programmes de PT 2004 (cf référence [9]): « La représentation de l'entropie générée par les frottements n'est pas exigible ».

• **Tous les problèmes de concours PT peuvent se traiter sans aucune difficulté en utilisant la méthode B.**

## CONCLUSION

Nous avons vu dans cet article que l'utilisation en PT de la relation  $ds = \frac{\delta q_e}{T} + \frac{\delta q_f}{T}$  peut entraîner de nombreuses erreurs d'interprétation et pose de nombreux problèmes pédagogiques :

- On ne peut pas identifier l'entropie créée à  $\frac{\delta q_f}{T}$ .
- L'entropie créée d'origine thermique est masquée dans la relation  $ds = \frac{\delta q_e}{T} + \frac{\delta q_f}{T}$ .
- Les présentations proposées aux étudiants pour introduire cette relation suscitent beaucoup de questions : pourquoi  $\delta q_f$  n'est pas rajouté dans le premier principe puisqu'il vient d'une source fictive extérieure et pourquoi  $\delta q_e$  est le même dans la transformation fictive de la méthode A ?
- Pourquoi utiliser  $ds = \frac{\delta q_e}{T} + \frac{\delta q_f}{T}$  pour étudier les systèmes ouverts en PT et  $ds = \delta s_e + \delta s_c$  pour étudier les systèmes fermés (machines dithermes par exemple) étudiés en PTSI ?

- La méthode *A* n'est pas compatible avec le programme PT 2004 qui insiste sur l'entropie créée que l'on ne peut pas identifier à  $\frac{\delta q_f}{T}$ .

La méthode *A* correspond à un tour de passe-passe et risque d'entraîner un problème de compréhension globale de la thermodynamique. Nous avons donc proposé une méthode *B* qui se recentre sur les **fondamentaux de la thermodynamique : premier principe, second principe, identité thermodynamique, entropie échangée et entropie créée**. Tous les systèmes rencontrés en thermodynamique industrielle en PT peuvent s'étudier avec ces équations fondamentales. En pratique, on utilise  $q_f = q_{ef}$  uniquement pour étudier l'irréversibilité (due aux forces de viscosité) d'un compresseur et d'une turbine adiabatiques.

Cette nouvelle approche de l'étude des systèmes ouverts en PT ne remet pas en cause la réforme de la thermodynamique effectuée en 1995 qui insiste sur l'identité thermodynamique, l'entropie échangée et l'entropie créée. Au contraire, elle va dans le même sens puisqu'elle remet l'entropie échangée et l'entropie créée au cœur de l'étude des systèmes ouverts comme pour les systèmes fermés depuis 1995. La méthode *B* permet de répondre aux problèmes de concours PT avec une approche rigoureuse.

Je termine la rédaction de la partie thermodynamique industrielle dans le nouveau livre « Physique – Tout-en-un – 2<sup>ème</sup> année PT Cours et exercices corrigés – Collection J'intègre – DUNOD (parution prévue juin 2008) ». Cet ouvrage couvre, en un seul volume, la totalité des programmes de physique de 2<sup>ème</sup> année de la filière PT. Les différents systèmes rencontrés en thermodynamique industrielle sont traités en détail avec la méthode *B* : différents types de compresseurs, turbine, tuyère, détente de Joule-Thomson ou laminage, systèmes ouverts à plusieurs entrées et plusieurs sorties, échangeur thermique, soutirage... avec de nombreux exercices, problèmes de concours corrigés et applications industrielles (cogénération, centrale nucléaire...), contraintes environnementales liées au réchauffement climatique, exercices utilisant le logiciel Thermoptim. Dans cet ouvrage,  $q_f = q_{ef}$  est appliqué uniquement pour étudier l'irréversibilité du compresseur et de la turbine.

L'étude des bilans énergétiques est très souvent complétée par des bilans exergétiques (voir référence [5]) qui sont hors programme en PT.

Une analyse plus détaillée de l'entropie se fait dans certaines spécialités en écoles d'ingénieurs. La création interne d'entropie est la conséquence de toutes les dissipations liées aux gradients de pression, de concentration, de potentiel chimique, de température, de vitesses... Il faut alors comparer les échelles de temps de ces phénomènes à celles de l'écoulement. Il y a transformation locale d'énergie « noble » en énergie interne. Les spécialistes essaient de calculer cette source d'entropie en traitant finement les phénomènes dissipatifs avec des logiciels de mécanique des fluides utilisant des maillages très fins et des équations microscopiques.

## REMERCIEMENTS

Tous mes remerciements chaleureux à Stéphane OLIVIER (professeur de physique en PC\* au lycée Louis le Grand à Paris), Renaud GICQUEL (professeur de thermodynamique à l'école des Mines de Paris et auteur de l'excellent logiciel Thermoptim qui est utilisé dans les classes de PT, PT\* en cours, en séance d'informatique et en TIPE), Gilles BERNARD (professeur de thermodynamique à l'ENSAM de Cluny), Michael HEYER (professeur de thermodynamique à l'ENSAM de Metz) ainsi qu'à mes collègues du lycée Gustave Eiffel de Bordeaux : Gérard DAREAU, Jean-Pierre JORRE (calculs de l'annexe 2), Georges ROUSSELET, Pierre SALLES, pour les nombreux échanges constructifs et la relecture attentive de cet article.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] OUZIAUX, Cours de thermodynamique.
- [2] DESCAMPS Didier, ENSAM Lille <http://didierdescamps.free.fr/thermo.pdf>
- [3] OUZIAUX Roger, « Mécanique des fluides appliquées », Dunod, 2004.
- [4] KIRILLIN, SYTCHEV, SHEINDLIN « Thermodynamique technique, technique soviétique », éditions Mir Moscou, 1976.
- [5] GICQUEL Renaud, « Systèmes énergétiques, tome 1 et 2 », Ecole des Mines de Paris Les Presses, 2001.
- [6] OLIVIER Stéphane et GIE Hubert, « Thermodynamique 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> année », éditions Tec et Doc collection de sciences physiques, 1996.
- [7] Problème de concours - Banque PT 1998 – Epreuve IIA.
- [8] Problème de concours - Banque PT 2002 – Epreuve IIA.
- [9] Programme des Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles, PT – programme 2004 : B.O. hors série n°6 du 16 septembre 2004 – Annexe 6 page 1734.



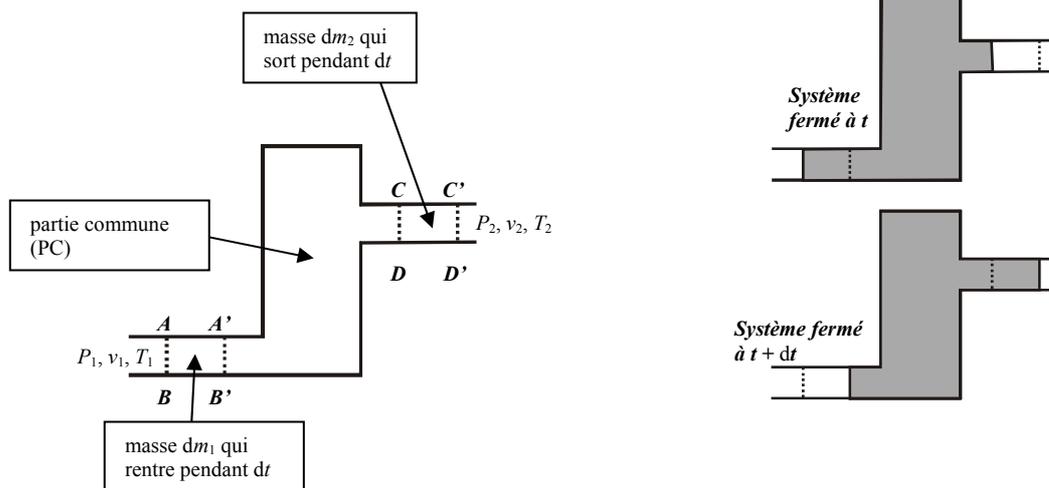
**Jean-Noël BEURY**  
*Professeur en Sup PCSI-SI*  
Lycée Gustave Eiffel  
33000 BORDEAUX

## ANNEXE 1 : EXPRESSION DU PREMIER PRINCIPE ET DU SECOND PRINCIPE POUR UN SYSTÈME OUVERT EN RÉGIME PERMANENT D'ÉCOULEMENT, À UNE ENTRÉE ET UNE SORTIE

On considère un fluide qui s'écoule de l'état 1 ( $p_1, v_1, T_1$ ) à l'état 2 ( $p_2, v_2, T_2$ ). La démonstration suivante est très générale et suppose que l'on est en régime permanent d'écoulement. On note en minuscules les grandeurs massiques.

### a) Comment se ramener à un système fermé ?

- Si on considère le système  $A'B'CD$  (appelé partie commune PC ou volume de contrôle) avec une frontière fixe, on a un système ouvert (échange de matière). On ne peut pas appliquer le premier principe de la thermodynamique.
- On se ramène à un système fermé ( $\Sigma$ ) de la façon suivante :
  - système fermé ( $\Sigma$ ) à  $t$  : partie commune (PC) + masse  $dm_1$  (de volume  $dV_1$ ) qui rentre pendant  $dt$ .
  - système fermé ( $\Sigma$ ) à  $t+dt$  : partie commune (PC) + masse  $dm_2$  (de volume  $dV_2$ ) qui sort pendant  $dt$ .



### b) Régime permanent d'écoulement

On dit aussi que le régime est stationnaire ou indépendant du temps. Toutes les fonctions d'état du système ouvert sont les mêmes à  $t$  et à  $t+dt$  :

$$U_{PC}(t) = U_{PC}(t+dt) ; E_{m,PC}(t) = E_{m,PC}(t+dt) ; S_{PC}(t) = S_{PC}(t+dt) \text{ et } M_{PC}(t) = M_{PC}(t+dt)$$

### c) Conservation de la masse

Le masse du système fermé est la même à  $t$  et à  $t+dt$  (définition d'un système fermé).

$$\begin{cases} M_{\Sigma}(t) = M_{PC}(t) + dm_1 \\ M_{\Sigma}(t+dt) = M_{PC}(t+dt) + dm_2 \end{cases}$$

Comme  $M_{\Sigma}(t) = M_{\Sigma}(t+dt)$ , on en déduit immédiatement que  $dm_1 = dm_2 = dm$  et

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt} . \text{ On a conservation du débit massique : } D_{m1} = D_{m2}$$

#### d) Expression du 1<sup>er</sup> principe

Le premier principe pour le système fermé ( $\Sigma$ ) s'écrit :

$$dU + dE_m = \delta W_{\text{extérieur}} + \delta Q_{\text{extérieur}}$$

- $dU = U(t + dt) - U(t) = \{U_{PC}(t + dt) + dm u_2\} - \{U_{PC}(t) + dm u_1\} = dm(u_2 - u_1)$
- $dE_m = E_m(t + dt) - E_m(t) = \{E_{mPC}(t + dt) + dme_{c2} + dme_{p2}\} - \{E_{mPC}(t) + dme_{c1} + dme_{p1}\}$   
 $= dm(e_{p2} - e_{p1} + e_{c2} - e_{c1})$
- $\delta Q_{\text{extérieur}} = q_e dm = \text{transfert thermique reçu de l'extérieur (échangé avec l'extérieur)}$   
**à travers toute la frontière du système ouvert.**
- $\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{pression amont}} + \delta W_{\text{pression aval}} + \delta W_i = \text{travail des forces extérieures ne dérivant pas d'une énergie potentielle (compris dans } dE_m)$   
 $\delta W_{\text{pression amont}} = \vec{F}_1 \cdot \vec{dl}_1 = +p_1 S_1 dl_1 = +p_1 dV_1 = p_1 v_1 dm > 0$  car force motrice (le volume de la masse qui rentre est exprimé avec le volume massique  $v_1$ )  
 On peut imaginer qu'un piston pousse du côté 1 pour faire rentrer la masse  $dm_1$ . Le travail de cette force est donc positif.  
 $\delta W_{\text{pression aval}} = \vec{F}_2 \cdot \vec{dl}_2 = -p_2 S_2 dl_2 = -p_2 dV_2 = -p_2 v_2 dm < 0$  car force résistante (le volume de la masse qui sort est exprimé avec le volume massique  $v_2$ ).  
 $\delta W_i = w_i dm = \text{travail indiqué} = \text{travail reçu par le fluide de la part des parties mobiles de la machine.}$

Finalement, on obtient :  $(u_2 - u_1) + (e_{p2} - e_{p1} + e_{c2} - e_{c1}) = q_e + p_1 v_1 - p_2 v_2 + w_i$

On pose  $h_2 = u_2 + p_2 v_2$  et  $h_1 = u_1 + p_1 v_1$  et on a :  $h_2 - h_1 + e_{p2} - e_{p1} + \frac{1}{2}c_2^2 - \frac{1}{2}c_1^2 = w_i + q_e$

En grandeurs massiques, le premier principe pour un système ouvert en régime permanent s'écrit :

$$\Delta h + \Delta e_p + \Delta e_c = w_i + q_e$$

Si on l'écrit en notation infinitésimale (états 1 et 2 très proches) :

$$\boxed{dh + de_p + de_c = \delta w_i + \delta q_e}$$

Tout se passe comme si une masse de 1 kg était transvasée de l'entrée (ABA'B') à la sortie (CDC'D') : on s'est donc ramené à un système fermé.

On dit qu'on a une **machine avec TRANSVASEMENT** puisqu'un fluide s'écoule en passant de l'état 1 à l'état 2. Tout se passe comme si une masse  $dm$  était « transvasée » de l'état 1 à l'état 2.

$\delta w_i$  est appelé le **travail indiqué massique**. Pour un compresseur :  $\delta w_i > 0$  et pour une turbine :  $\delta w_i < 0$ .

$\delta q_e$  est le **transfert thermique massique reçu de l'extérieur** à travers toute la frontière du système ouvert.

Remarque : La démonstration précédente a été faite en supposant le régime permanent. On peut remplacer cette hypothèse par l'hypothèse d'une machine cyclique : c'est une machine qui revient dans le même état au bout du temps  $dt$ . Le  $dt$  choisi est le commun multiple de toutes les périodes des différents composants du système.

### e) Expression du second principe

Le deuxième principe pour le système fermé ( $\Sigma$ ) s'écrit :  $dS = \delta S_e + \delta S_c$

avec  $dS = S(t + dt) - S(t) = \{S_{PC}(t + dt) + dm s_2\} - \{S_{PC}(t) + dm s_1\} = dm(s_2 - s_1) = dm \Delta s$

On pose  $\delta S_e = s_e dm$  et  $\delta S_c = s_c dm$

On a donc :  $\Delta s = s_2 - s_1 = s_e + s_c$

L'entropie échangée massique  $s_e$  est nulle si la transformation est adiabatique.

L'entropie créée massique  $s_c$  est strictement positive si la transformation est irréversible.

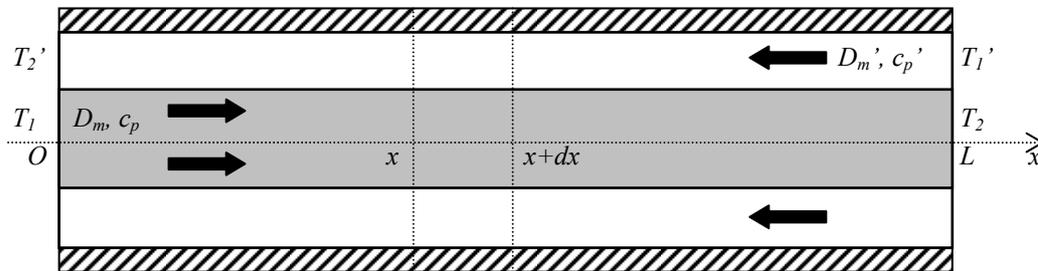
L'entropie créée massique est nulle si la transformation est réversible.

Si on l'écrit en notation infinitésimale (1 et 2 très proches) :

$$ds = \delta s_e + \delta s_c$$

## ANNEXE 2 : CRÉATION D'ENTROPIE DANS UN ÉCHANGEUR THERMIQUE

On considère un échangeur thermique parfaitement calorifugé, de longueur  $L$ , parcouru par deux fluides à contre-courant :



On note  $T_1$  et  $T_1'$  les températures, supposées connues, des fluides à l'entrée de l'échangeur,  $T_2$  et  $T_2'$  sont respectivement les températures à la sortie. On admet que les températures ne dépendent que de  $x$  et on néglige la conduction thermique le long de l'axe  $Ox$ . On note  $g$  la conductance thermique par unité de longueur de la paroi échangeuse.

Le premier principe de la thermodynamique pour chacun des fluides en régime permanent s'écrit :

$$D_m [h(x + dx) - h(x)] = g dx [T'(x) - T(x)] ; \quad D_m' [h'(x) - h'(x + dx)] = g dx [T(x) - T'(x)]$$

Soit :

$$D_m \frac{dh}{dx} = g(T' - T) ; \quad D_m' \frac{dh'}{dx} = g(T - T')$$

On assimile les deux fluides à des gaz parfaits :

$$D_m c_p \frac{dT}{dx} = g(T' - T) ; \quad D_m' c_p' \frac{dT'}{dx} = g(T - T')$$

On pose :  $\lambda = \frac{D_m c_p}{g}$  ;  $\lambda' = \frac{D_m' c_p' }{g}$  et  $k = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}$ .

On obtient :  $\lambda \frac{dT}{dx} = T' - T$  (eq.1) ;  $\lambda' \frac{dT'}{dx} = T' - T$  (eq.2)

- En faisant la différence des deux équations précédentes, on obtient :

$$\lambda \frac{dT}{dx} - \lambda' \frac{dT'}{dx} = 0, \text{ on a } \lambda T - \lambda' T' = \lambda T_1 - \lambda' T_2' \text{ (eq.3) et}$$

$$\lambda T - \lambda' T' = \lambda T_2 - \lambda' T_1' \text{ (eq.4)}$$

- On divise (eq.1) par  $\lambda$  et (eq.2) par  $\lambda'$ . En faisant la différence :

$$\frac{dT}{dx} - \frac{dT'}{dx} = T' \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) - T \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right), \text{ soit } \frac{d(T' - T)}{dx} = -k(T' - T)$$

On en déduit :

$$T' - T = (T_2' - T_1) e^{-kx} \text{ (eq.5) et } T' - T = (T_1' - T_2) e^{k(L-x)} \text{ (eq.6)}$$

En combinant (eq.3) et (eq.5), on a :

$$T = T_1 + \frac{T_2' - T_1}{k\lambda} (1 - e^{-kx}) \text{ (eq.7) ; } T' = T_2' + \frac{T_1' - T_2}{k\lambda'} (1 - e^{-kx}) \text{ (eq.8)}$$

En combinant (eq.4) en  $x = 0$  et (eq.7) en  $x = L$ , on obtient :

$$T_2' - T_1 = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda' - \lambda e^{-kL}} (T_1' - T_1) \text{ (eq.9)}$$

En combinant (eq.6) en  $x = 0$  et (eq.9), on a :

$$T_1' - T_2 = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda' e^{kL} - \lambda} (T_1' - T_1) \text{ (eq.10)}$$

On en déduit immédiatement (avec eq.7 et eq.9) :

$$T = T_1 + (T_1' - T_1) \frac{\lambda' (1 - e^{-kx})}{\lambda' - \lambda e^{-kL}} \text{ (eq.11) ;}$$

puis avec (eq.5), (eq.11) et (eq.9) on a :  $T' = T_1' + (T_1' - T_1) \frac{\lambda (e^{-kL} - e^{-kx})}{\lambda' - \lambda e^{-kL}}$

*Remarque : Dans le cas très particulier où  $\lambda = \lambda'$  ( $k = 0$ ) :  $T' - T = T_2' - T_1 = T_1' - T_2$*

*En combinant (eq.1) et (eq.3), on a  $T = T_1 + \frac{T_2' - T_1}{\lambda} x$  (eq.11) ;  $T' = T_2' + \frac{T_1' - T_2}{\lambda} x$*

*(eq.12)*

*Dans ce cas, et ce cas seulement, l'écart des températures est constant et vaut :*

$$T' - T = \frac{T_1' - T_1}{1 + L/\lambda} \text{ (en combinant eq.11 et eq.12 en } x = L)$$

*Cet écart devient nul si  $L \gg \lambda$ .*

Un bilan entropique sur l'échangeur complet donne :

$$\frac{dS}{dt} = D_m (s_2 - s_1) + D_m' (s_2' - s_1') = \frac{\delta S_c}{dt}$$

Or, pour une isobare dans le cas particulier d'un gaz parfait,  $ds = \frac{dh}{T} = c_p \frac{dT}{T}$ , donc :

$$\frac{\delta S_c}{dt} = D_m c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + D_m' c_p \ln\left(\frac{T_2'}{T_1'}\right)$$

$$\frac{\delta S_c}{dt} = g\lambda \ln\left(1 + \frac{T_1' - T_1}{T_1} \frac{\lambda'(1 - e^{-kL})}{\lambda' - \lambda e^{-kL}}\right) + g\lambda' \ln\left(1 + \frac{T_1' - T_1}{T_1'} \frac{\lambda(e^{-kL} - 1)}{\lambda' - \lambda e^{-kL}}\right)$$

Un développement limité à l'ordre un donne :

$$\frac{\delta S_c}{dt} = g\lambda \frac{T_1' - T_1}{T_1} \frac{\lambda'(1 - e^{-kL})}{\lambda' - \lambda e^{-kL}} + g\lambda' \frac{T_1' - T_1}{T_1'} \frac{\lambda(e^{-kL} - 1)}{\lambda' - \lambda e^{-kL}}$$

$$\frac{\delta S_c}{dt} = \frac{g\lambda\lambda'(T_1' - T_1)(1 - e^{-kL})}{\lambda' - \lambda e^{-kL}} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_1'}\right)$$

$$\frac{\delta S_c}{dt} = \frac{g\lambda\lambda'(T_1' - T_1)^2(1 - e^{-kL})}{T_1 T_1' (\lambda' - \lambda e^{-kL})} = \frac{g\lambda\lambda'(T_1' - T_1)^2(e^{-L/\lambda'} - e^{-L/\lambda})}{T_1 T_1' (\lambda' e^{-L/\lambda'} - \lambda e^{-L/\lambda})}$$

On obtient une expression symétrique en  $\lambda \leftrightarrow \lambda'$ . Si on suppose que  $\lambda' > \lambda$  on vérifie que tous les termes de cette expression sont positifs et donc que **l'entropie créée est bien strictement positive**. Elle est nulle si et seulement si  $T_1 = T_1'$ .

On remarque que l'entropie créée n'est que du second ordre en  $T_1' - T_1$ , **ce qui signifie que pour les petites différences de températures l'échange devient réversible**. On peut aussi donner les formes asymptotiques :

- Si  $kL \ll 1$  alors  $\frac{\delta S_c}{dt} \approx \frac{gL(T_1' - T_1)^2}{T_1 T_1'}$
- Si  $kL \gg 1$  alors  $\frac{\delta S_c}{dt} \approx \frac{g\lambda(T_1' - T_1)^2}{T_1 T_1'}$

Si l'échange n'est pas isobare il faut rajouter les termes de pression :

$$\frac{\delta S_c}{dt} = D_m c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + D_m' c_p \ln\left(\frac{T_2'}{T_1'}\right) + r \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) + r \ln\left(\frac{p_1'}{p_2'}\right)$$

Les deux termes rajoutés sont positifs car  $p_1 - p_2 > 0$  et  $p_1' - p_2' > 0$  (ce sont les pertes de charge dues à la viscosité des fluides).

**L'entropie créée apparaît donc comme la somme de l'entropie créée par l'irréversibilité thermique et de l'entropie créée par l'irréversibilité mécanique, c'est-à-dire par l'ensemble des phénomènes diffusifs (diffusion de chaleur et diffusion de quantité de mouvement).**

### ANNEXE 3 : COMPLEMENTS SUR LA POLYTROPIQUE

Pour le compresseur et la turbine, on modélise souvent la transformation réelle irréversible par une transformation fictive réversible polytropique avec un gaz parfait.

#### a) Introduction de la polytropique pour un gaz parfait

Cela revient à considérer que les irréversibilités sont réparties uniformément tout au long de la compression, ce qui sur le plan technologique, correspond assez bien au cas des machines multi étagées (voir référence [5]). Ce modèle se traduit par la relation suivante :

$T ds = c dT$  ( $s$  entropie massique,  $T$  température absolue en Kelvin) où  $c$  est la *capacité thermique massique vraie* de cette évolution ( $c$  est une constante, indépendante de la température). Il ne faut pas confondre pour le gaz parfait  $c$ ,  $c_v$  et  $c_p$ .

On peut écrire l'identité thermodynamique et la relation entre  $h$  et  $T$  pour un gaz parfait :

$$dh = c_p dT = Tds + vdp. \text{ On en déduit que } c_p \frac{dT}{T} = c \frac{dT}{T} + v \frac{dp}{T}.$$

Comme  $pv = rT$ , on a  $c_p \frac{dT}{T} = c \frac{dT}{T} + r \frac{dp}{p}$  (eq.1). Pour trouver une relation entre  $p$  et  $v$ , il

faut éliminer  $T$  et  $dT$  :  $pv = rT \Rightarrow \frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} = \frac{dT}{T}$  (eq.2). En combinant les équations 1 et

2, on obtient :  $(c - c_p) \left( \frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} \right) + r \frac{dp}{p} = 0$ , d'où  $(c - c_p + r) \frac{dp}{p} + (c - c_p) \frac{dv}{v} = 0$ . Or

$$r = c_p - c_v, \text{ on a donc } c - c_p + r = c - c_v. \text{ On en déduit : } (c - c_v) \frac{dp}{p} + (c - c_p) \frac{dv}{v} = 0$$

En intégrant :  $(c - c_v) \ln p + (c - c_p) \ln v = cte1$ , d'où  $\ln p + \ln v^{\frac{c-c_p}{c-c_v}} = cte2$ ;

Cette évolution est donc définie par  $pv^k = cte$  avec  $k = \frac{c - c_p}{c - c_v}$ . En utilisant  $pv = rT$ , on

arrive à 
$$Tp^{\frac{1-k}{k}} = cte.$$

$k$  est appelé le coefficient polytropique de la transformation.

### b) Calcul de $k$ et de $c$

Pour calculer  $k$ , on connaît très souvent dans les problèmes l'état initial ( $T_1, p_1$ ) et l'état final ( $T_2, p_2$ ). La température et la pression s'obtiennent très facilement avec des capteurs de température et de pression. On utilise très souvent en thermodynamique industrielle le jeu de variables  $(T, p)$ .

Il suffit d'écrire la relation  $Tp^{\frac{1-k}{k}} = cte$  pour l'état 1 et pour l'état 2.

$$T_1 p_1^{\frac{1-k}{k}} = T_2 p_2^{\frac{1-k}{k}}; \text{ d'où } \frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1-k}{k}} \text{ d'où } \ln \left( \frac{T_1}{T_2} \right) = \frac{1-k}{k} \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right)$$

$$\text{d'où } k \ln \left( \frac{T_1}{T_2} \right) = (1-k) \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) \text{ et } k \left\{ \ln \left( \frac{T_1}{T_2} \right) + \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) \right\} = \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right)$$

$$\text{Finalement, on obtient : } k = \frac{\ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right)}{\ln \left( \frac{T_1}{T_2} \right) + \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right)}.$$

Connaissant  $k$ ,  $c_p$  et  $c_v$ , on peut en déduire  $c = \frac{kc_v - c_p}{k - 1}$ .