

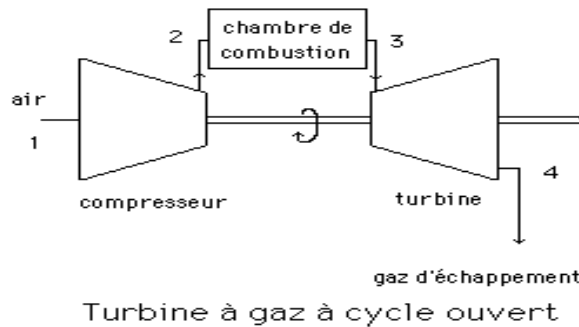
Exercice sur les compressions et détente

Etude d'un cycle de turbine à gaz

Dans un cycle de Brayton ouvert, cycle de base de la turbine à gaz, on aspire de l'air à une pression de 1 bar et 15 °C, et on le comprime à 5 bars. Il est ensuite échauffé dans la chambre de combustion, dont il sort à la température de 950 °C. Les rendements isentropiques du compresseur et de la turbine sont respectivement égaux à 87,5% et 88,5 %.

1) Etude du cycle

Calculer le cycle et déterminer son rendement, en faisant l'hypothèse que la machine est traversée par de l'air, supposé se comporter comme un gaz parfait.

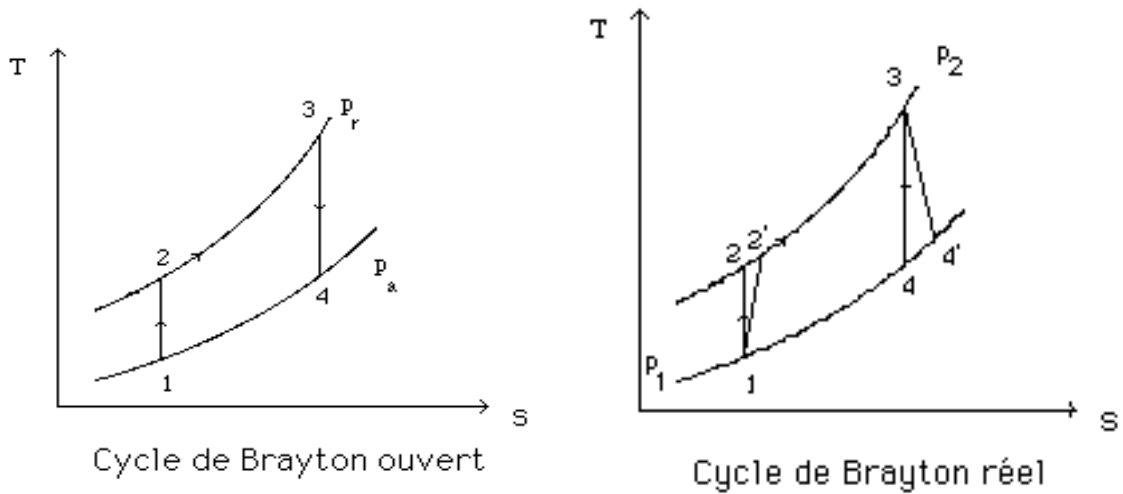


2) Comparaison avec l'approche polytrophique

On demande ensuite de déterminer les exposants et les rendements polytropiques de la détente et de la compression.

Corrigé analytique

1) Etude du cycle



Le rendement du cycle est égal au rapport du travail utile (turbine moins compresseur) à la chaleur fournie au fluide. Il est donné par la formule :

$$\eta = \frac{|\tau_t| - \tau_c}{Q}$$

D'après le premier principe, sur les isobares $Q = \Delta h$, et, sur les adiabatiques, $\tau = \Delta h$

$$\eta = \frac{(h_3 - h_4') - (h_2' - h_1)}{h_3 - h_2'}$$

L'air étant considéré comme un gaz parfait, $\Delta h = C_p \Delta T$, ce qui nous permet d'écrire le rendement sous la forme suivante :

$$\eta = \frac{C_p \cdot (T_3 - T_4') - C_p \cdot (T_2' - T_1)}{C_p (T_3 - T_2')}$$

$$\eta = \frac{(T_3 - T_4') - (T_2' - T_1)}{T_3 - T_2'}$$

Nous connaissons T_1 et T_3 :

$$T_1 = 15^\circ\text{C} = 273 + 15 = 288 \text{ K}$$

$$T_3 = 950^\circ\text{C} = 273 + 950 = 1223 \text{ K}$$

Il nous faut donc calculer T_2 , T_2' , T_4 et T_4' .

Pour calculer T_2 et T_4 , nous savons que pour une évolution isentropique :

$$P T^{\gamma / (1 - \gamma)} = \text{Cste},$$

$$\text{donc } P_1 T_1^{\gamma / (1 - \gamma)} = P_2 T_2^{\gamma / (1 - \gamma)}$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{(\gamma - 1) / \gamma}$$

Avec nos hypothèses :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,40$$

$$P_1 = P_4 = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_2 = P_3 = 5 \text{ bars} = 5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

D'où :

$$T_2 = 288 \left(\frac{5 \cdot 10^5}{10^5} \right)^{(1,4 - 1) / 1,4} = 288 \cdot 5^{0,286}$$

$$\mathbf{T_2 = 456 \text{ K}}$$

$$\text{De même : } T_4 = T_3 \left(\frac{P_4}{P_3} \right)^{(\gamma - 1) / \gamma}$$

$$T_4 = 1123 \left(\frac{10^5}{5 \cdot 10^5} \right)^{(1,4 - 1) / 1,4} = 1123 \cdot 0,2^{0,286}$$

$$\mathbf{T_4 = 772,5 \text{ K}}$$

Les rendements isentropiques du compresseur et de la turbine étant respectivement égaux à 87,5 % et 88,5 %, on peut calculer T_2' et T_4' :

$$\eta_c = \frac{h_2 - h_1}{h_{2'} - h_1} = \frac{C_p (h_2 - h_1)}{C_p (h_{2'} - h_1)} = \frac{T_2 - T_1}{T_{2'} - T_1} = 0,85$$

$$\text{d'où : } T_{2'} = \frac{T_2 - T_1}{\eta_c} + T_1 = \frac{456 - 288}{0,85} + 288$$

$$\mathbf{T_{2'} = 480 \text{ K}}$$

$$\text{de même : } \eta_t = \frac{h_4' - h_3}{h_4 - h_3} = \frac{C_p (h_4' - h_3)}{C_p (h_4 - h_3)} = \frac{T_4' - T_3}{T_4 - T_3} = 0,9$$

$$\text{d'où : } T_4' = \eta_t \cdot (T_4 - T_3) + T_3 = 0,9 (772,5 - 1223) + 1223$$

$$\mathbf{T_4' = 824 \text{ K}}$$

Connaissant les différentes températures, on peut donc calculer le rendement du cycle :

$$\eta = \frac{(T_3 - T_4') - (T_2' - T_1)}{T_3 - T_2'}$$

$$\eta = \frac{(1223 - 824) - (480 - 288)}{1223 - 480}$$

$$\mathbf{h = 0,279 = 27,9 \%}$$

2) Comparaison avec l'approche polytropique

Il s'agit maintenant de déterminer les coefficients polytropiques de la détente et de la compression.

Par définition de la polytropique, et en appelant k le coefficient polytropique de la compression, et k' celui de la détente, nous avons :

$$T_2' = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{(k-1)/k} \quad T_4' = T_3 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{(k'-1)/k'}$$

Pour la compression :

$$\frac{T_2'}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{(k-1)/k}$$

$$\frac{k-1}{k} = \frac{\ln\left(\frac{T_2'}{T_1}\right)}{\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{480}{288}\right)}{\ln\left(\frac{5 \cdot 10^5}{10^5}\right)}$$

$$\frac{k-1}{k} = \frac{\ln(1,67)}{\ln(5)} = 0,317$$

$$\mathbf{k = \frac{1}{1 - 0,317} = 1,465}$$

Pour la détente :

$$T_{4'} = T_3 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{(k' - 1) / k'}$$

$$\frac{T_{4'}}{T_3} = \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{(k' - 1) / k'}$$

$$\frac{k' - 1}{k'} = \frac{\ln\left(\frac{T_{4'}}{T_3}\right)}{\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{824}{1223}\right)}{\ln\left(\frac{10^5}{5 \cdot 10^5}\right)}$$

$$\frac{k' - 1}{k'} = \frac{\ln(0,734)}{\ln(0,2)} = 0,245$$

$$k' = \frac{1}{1 - 0,245} = \mathbf{1,325}$$

Nous constatons donc que :

$$\mathbf{k' < \gamma < k}$$

Calcul des rendements polytropiques h_p et h_p'

Le rendement polytropique du compresseur est donné par la formule :

$$\frac{k - 1}{k} = \frac{1}{\eta_p} \cdot \frac{\gamma - 1}{\gamma}$$

D'où :

$$\eta_p = \frac{k(\gamma - 1)}{\gamma(k - 1)} = \frac{1,465(1,4 - 1)}{1,4(1,465 - 1)}$$

$$\mathbf{h_p = 0,9 > h_c = 0,875}$$

De même pour la turbine :

$$\frac{k' - 1}{k'} = \eta_{p'} \cdot \frac{\gamma - 1}{\gamma}$$

$$\eta_{p'} = \frac{\gamma (k' - 1)}{k' (\gamma - 1)} = \frac{1,4 (1,325 - 1)}{1,325 (1,4 - 1)}$$

$$h_{p'} = 0,858 < h_t = 0,885$$

Pour le compresseur, le rendement polytropique est supérieur au rendement isentropique, tandis que c'est l'inverse pour la turbine.